振動問題の考え方と解析法

§１　質点ーバネ系（１自由度）の振動方程式

●自由振動の方程式

・右図の質点ーバネ系において

x_0：バネが無ひずみ状態の時の質点位置

x_s：静的平衡状態の質点位置（静止位置）

x：振動中の任意時点の質点位置

とすると、静止位置のつり合いから

$$mg = k(x_s - x_0) \qquad (1.1)$$

質点は静止位置を中心に振動するから、通常はこの位置からの**相対変位**

$$u = x - x_s \qquad (1.2)$$

を用いて振動解析が行われる。

・質点を適当に引張ってから手を離すと、静止位置を中心に振動が起こる。外力を加え強制的に振動させている訳ではないから、空気抵抗等の作用でやがて振動は止まる。このような振動を**自由振動**という。

・ニュートンの法則「質量mの物体に力ｆが働くとｆに比例する加速度（ｆ＝ｍα）の下で運動が起こる」によると、自由振動中の質点には

重力：$f_g = mg$（下向き）

バネ力：$f_e = k(x - x_0)$（上向き）

の力が働いており、その差が加速度ｘ''になる。

$$f = mx'' = mg - k(x - x_0)$$

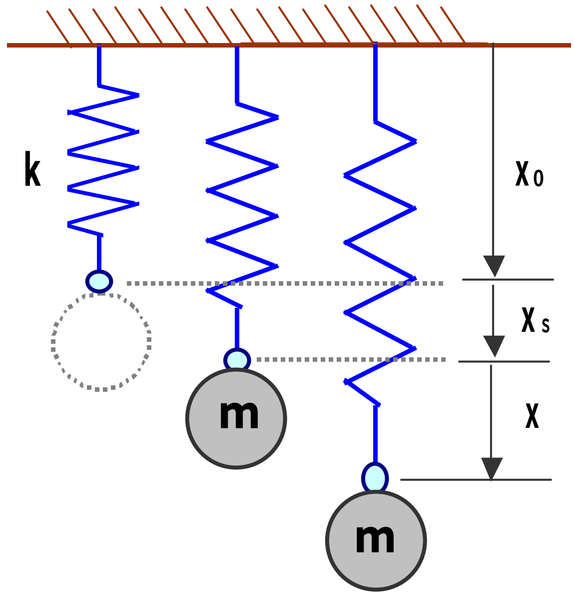
このｍｇに式(1.1)を代入すると

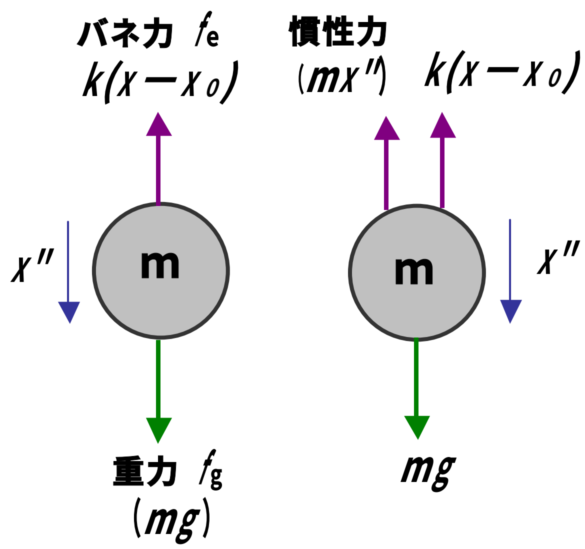
$$\begin{aligned} mx'' &= k(x_s - x_0) - k(x - x_0) \\ &= -k(x - x_s) \\ &= -ku \end{aligned}$$

式(1.2)よりｕ''＝ｘ''であるから、上式は

$$mu'' + ku = 0 \qquad (1.3)$$

これが**自由振動の基礎方程式**である。





＊ダランベールの原理「質量と加速度の積である慣性力を加速度と逆の方向に働く力として扱えば、動的問題の方程式は静的な力のつり合い式の形で書ける」によると、上の問題は以下の形に書ける。

$$k(x - x_0) = mg - mx''$$

式(1.1)を代入して式(1.3)と同形を得る。

●強制振動の方程式

・質点系の外部から強制外力ｆ(t) が作用する場合の基礎方程式は、ダランベールの原理より

慣性力＋バネ力＋重力＋ｆ(t)＝0

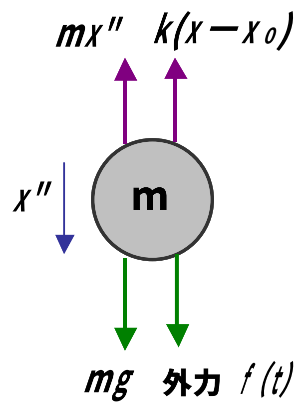
であり、絶対変位ｘで書けば

$$-mx''-k(x-x_0)+mg+f(t)=0$$

式(1.1),(1.2)の関係から、相対変位ｕで書くと

$$mu''+ku=f(t) \qquad (1.4)$$

となる。これが（減衰のない質点系の）**強制振動の基礎方程式**である。



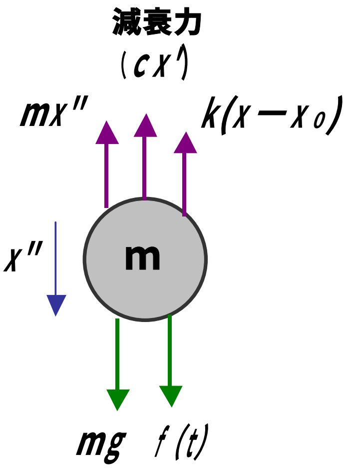
●減衰振動の方程式

・上記のｆ(t)の代わりに、速度ｘ'(＝ｕ')に比例する（ｘ'と反対方向の）外力を考える。 この種の力は振動を減衰させる働きをするので、**減衰力**と呼ばれている。このとき

$$f(x')=-cx'=-cu' \quad (c>0)$$

$$mu''+cu'+ku=0 \qquad (1.5)$$

となり、減衰系の自由振動の方程式を得る。



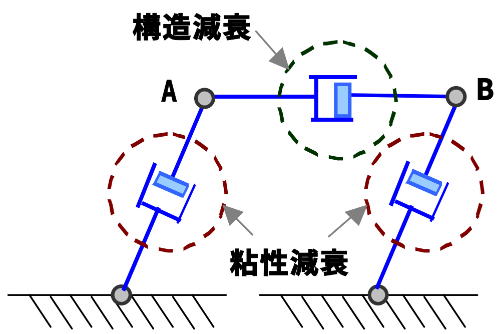
・式(1.4),(1.5) をまとめると、減衰のある質点系の強制振動の基礎方程式として、一般に

$$mu''+cu'+ku=f(t) \qquad (1.6)$$

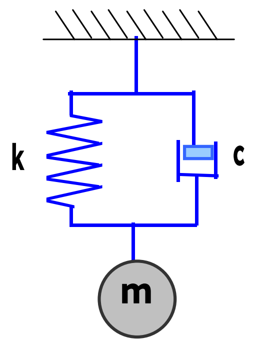
・減衰力の実体は明確ではないが、大別すると

＃**粘性減衰**：構造物周囲の流体の粘性に起因
＃**構造減衰**：構造物自体の内部摩擦等に起因

になる。粘性減衰は２点が同じ速度で動いても起こるから、減衰力は各点の速度に比例する。構造減衰は２点間に変形が生じて起こるから、減衰力は各点のひずみ速度に依存する



・いずれにしても、速度に比例する減衰のメカニズム：ｆ(ｘ')＝－ｃｘ'は、ダッシュポットで表現されるので、減衰のある振動系のモデル化には、バネとダッシュポットを並列に設置したVoigt型のモデルが用いられる。



＊Voigt型モデル：ｆ＝ｋｘ＋ｃｘ'

●非減衰自由振動の解（※補足１）

・式(1.3)を、$\omega^2 = k/m$ として書き直すと

$$u'' + \omega^2 u = 0 \qquad (1.3)'$$

この解は $u = a\sin\omega t + b\cos\omega t$ と置けるので、初期条件：$t=0$ で $u=u_0$, $u'=v_0$ を導入すると、$a = v_0/\omega, b = u_0$ となり

$$u = (v_0/\omega)\sin\omega t + u_0\cos\omega t$$
$$= C\sin(\omega t + \phi) \qquad (1.7)※$$

ただし

$$C = (a^2+b^2)^{0.5} = \{(v_0/\omega)^2 + u_0^2\}^{0.5}$$
$$\phi = \tan^{-1}(b/a) = \omega u_0/v_0$$

の単弦振動の解が得られる。

＊$\omega = (k/m)^{0.5}$：固有円振動数

＊振動の１周期＝$\omega t = 2\pi$ より

固有周期：$T = 2\pi/\omega = 2\pi(m/k)^{0.5}$

固有振動数：$f = 1/T = \omega/2\pi$

$= (k/m)^{0.5}/2\pi$

Ｔ及びｆは、構造系のｍとｋだけで決まる

＊式(1.7)のＣは振幅といい、質点の平衡位置からの最大変位を表す。ϕは位相角

＊式(1.7)を微分すると

速度：$u' = \omega C\cos(\omega t + \phi)$

$= \omega C\sin(\omega t + \pi/2 + \phi)$

加速度：$u'' = -\omega^2 C\sin(\omega t + \phi)$

$= -\omega^2 u$

$= \omega^2 C\sin(\omega t + \pi + \phi)$

＃速度振幅はωC、加速度振幅は$\omega^2 C$

＃速度は90°、加速度は180°位相が進む

●減衰自由振動の解

・式(1.5)をｍで除し、$2\varepsilon = c/m$ と置いて

$$u'' + 2\varepsilon u' + \omega^2 u = 0 \qquad (1.5)'$$

この解は**減衰定数**$h = \varepsilon/\omega < 1$ のとき

$$u = e^{-h\omega t}(a\sin\omega' t + b\cos\omega' t)$$
$$= C e^{-h\omega t}\sin(\omega' t + \phi) \qquad (1.8)$$

・この場合は、１周期＝$\omega' t = 2\pi$であるから、固有周期$T' = 2\pi/\omega'$は、減衰のない系の固有周期$T = 2\pi/\omega$ より長くなる。

$$T' = 2\pi/[\omega(1-h^2)^{0.5}] = T/(1-h^2)^{0.5}$$

＊εとωの比を減衰定数といい、ｈで表す

$h = \varepsilon/\omega = c/[2(km)^{0.5}]$

＊$h \geqq 1$ では振動しない(過減衰・臨海減衰)

＊ω'は減衰振動時の固有円振動数であり

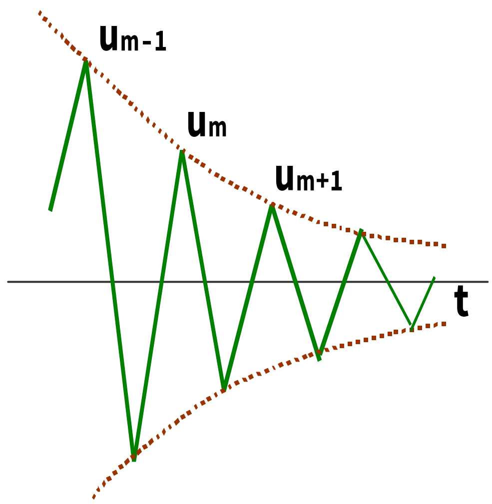
$\omega' = \omega(1-h^2)^{0.5}$

・振動中のピーク値は減衰によって刻々減少するが、相次ぐピーク値の比率は振動回数によらず 一定であり、**減衰比**η、あるいはその自然対数をとった**対数減衰率**λが次のように定義される。

$$\eta = u_m/u_{m+1} = \exp(2\pi h/(1-h^2)^{0.5})$$
$$\lambda = \ln(u_m/u_{m+1}) = 2\pi h/(1-h^2)^{0.5}$$

一般の構造物では減衰定数ｈは１に比べて極めて小さいから、近似的に $(1-h^2)^{0.5}$ 1 としてよく、減衰特性として次の形が用いられる。

$$\text{減衰比：}\eta = \exp(2\pi h)$$
$$\text{対数減衰率：}\lambda = 2\pi h \qquad (1.9)$$



●(力による)強制振動の解

・１自由度系に正弦波外力 $f(t)=P_0\sin\omega_f t$ が作用すると、式(1.6)は $p_0=P_0/m$ として

$$u''+2h\omega u'+\omega^2 u=p_0\sin\omega_f t \quad (1.6)'$$

この方程式の解は、右辺を０とした同次方程式の一般解と上式の特解の和で与えられ、前者は自由振動の式(1.8)である。 特解は、質点系が外力の振動(ω_f)に対応して振動することから

$$u=D\sin(\omega_f t+\psi)$$

の形に置くことができる。振動開始から時間が十分経過した時点で自由振動は消滅し、特解の強制振動のみ残る。その解は次式のようになる。

$$u=\frac{p_0}{\omega^2}\cdot\frac{\sin(\omega_f t+\varphi)}{\left\{(1-\xi^2)^2+(2h\xi)^2\right\}^{0.5}}$$

$$=(\delta_{st}L_0)\sin(\omega_f t+\psi) \qquad (1.10)$$

ただし、振動数比を $\xi=\omega_f/\omega$ と置いた。位相差は $\psi=\tan^{-1}[2h\xi/(1-\xi^2)]$ となる。

・**応答倍率** L_0が最大となる(共振振動の)条件は、$dL_0/d\xi=0$ より $\xi=(1-2h^2)^{0.5}$ である。hが大きいと**共振振動数**は系の固有振動数より小さい。hが小さい時は ξ 　$1(\omega_f$ 　$\omega)$ で共振し、この時の応答倍率は L_{0max} 　$1/2h$ になる。**共振点**の前($\xi<1$)では $L_0\rightarrow1$、共振点の後では再び減少して $L_0\rightarrow0$ になる。

・加速度の応答は、式(1.10)を２回微分して

$$u''=-(p_0L_2)\sin(\omega_f t+\psi)$$

の形になる。ここで、$L_2=\xi^2L_0$であり、L_2とξの関係は右図のようになる。

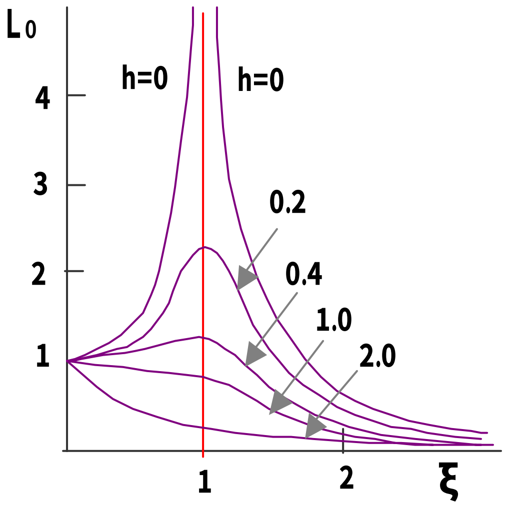
●(変位による)強制振動の解

・地震時の構造物の振動は、支点が変位するために起こる振動である。 支点(地動)変位をu_g、支点からの相対変位をuとすると、質点の慣性力は絶対加速度 $z''(=u_g''+u'')$に比例し、減衰力やバネ力は相対変位uに関連すると考えられるので、振動方程式は式(1.5)より

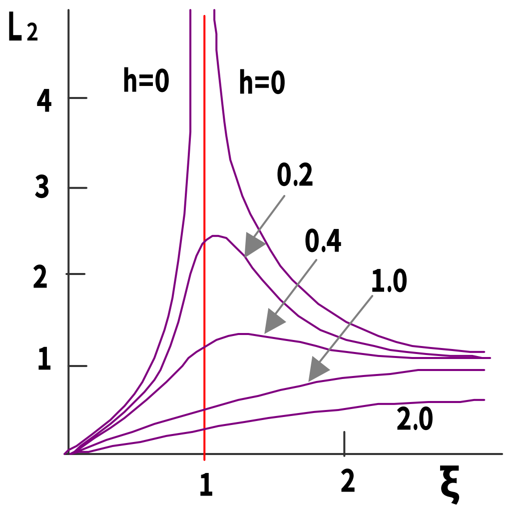
＊P_0 が静的に作用したときの静止位置からの変位δ_{st}は次式で与えられる。

$$\delta_{st}=P_0/k=p_0m/k=p_0/\omega^2$$

外力が動的に作用した場合の変位をδと置くと、変位応答の倍率として$L_0=\delta/\delta_{st}$が定義される。



<変位の共振曲線>



<加速度の共振曲線>

$$m z'' + c u' + k u = 0 \qquad (1.5)'$$
$$\downarrow$$
$$m u'' + c u' + k u = -m u_g''$$
$$\downarrow$$
$$u'' + 2h\omega u' + \omega^2 u = -u_g''$$

・地動変位が $u_g = u_0 \sin\omega_g t$ の正弦波で表される場合は、上式に代入して

$$u'' + 2h\omega u' + \omega^2 u = \omega_g^2 u_0 \sin\omega_g t$$

これは式(1.6)'で $p_0 = \omega_g^2 u_0$ と置いたものに等しいから、強制振動の解は（$\xi = \omega_g/\omega$）

$$u = \frac{u_0 \xi^2 \sin(\omega_f t + \varphi)}{\{(1-\xi^2)^2 + (2h\xi)^2\}^{0.5}}$$
$$= u_0 L_2 \sin(\omega_g t + \psi) \qquad (1.11)$$

L_2は構造物の相対変位uと支点変位u_gの倍率を表すが、この特性は前述の力による強制振動における加速度の共振特性と一致する。

・式(1.5)'より、構造物の加速度$u_g'' + u''$ は

$$u_g'' + u'' = 2h\omega u' + \omega^2 u$$

であるから、これに上記の解のu, u'を入れて

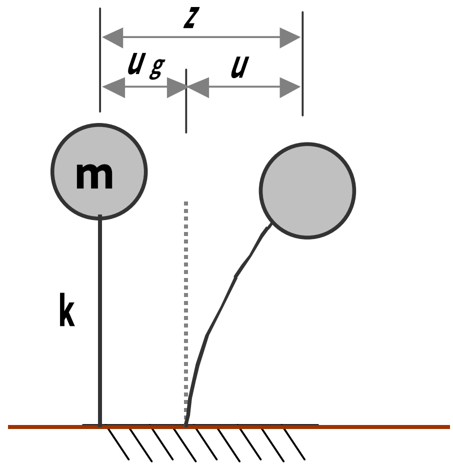
$$u_g'' + u'' = -\omega_g^2 u_0 L_2' \sin(\omega_g t + \psi)$$

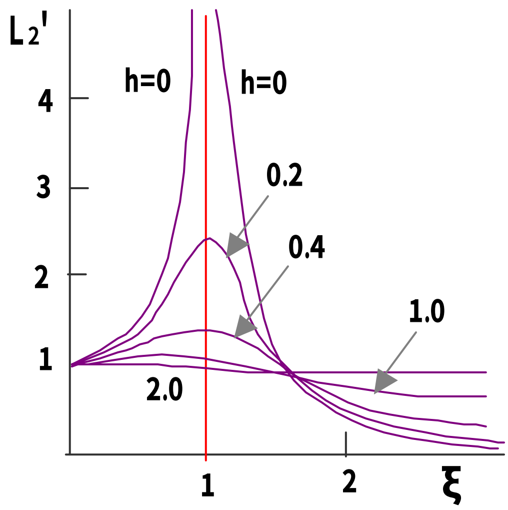
$$L_2' = \left[\frac{1+(2h\xi)^2}{(1-\xi^2)^2 + (2h\xi)^2}\right]^{0.5}$$

L_2' は地動加速度($\omega_g^2 u_0$)に対する構造物の加速度応答の倍率を表し、その値は振動率比$\xi = \omega_g/\omega$と減衰定数hの関数である。

・図で明らかなように、構造物の加速度は、振動数比$\xi \to 0$ では支点(地動)の加速度と同一になるが、ξが大きくなると、次第に小さくなる。つまり、構造物の固有振動数ωが地動の振動数ω_g よりはるかに小さければ（周期で言えば、構造物の固有周期Tが地動の振動周期T_g よりはるかに大きければ）構造物は殆ど振動しない。これを『**免震構造**』という。建物を免震構造にする２大要素は、①固有周期を長くすることと、②減衰装置を設置する(h大にする)ことである。

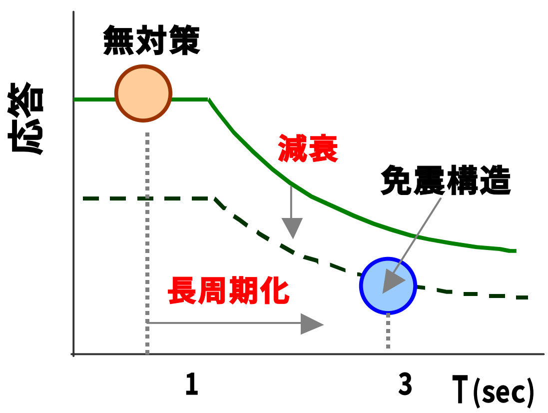
＊絶対変位：$z = u_g + u$





＜地動による加速度応答の倍率＞

＊L_2'は、地動変位(u_0)に対する構造物の絶対変位($u_g + u$)の応答倍率でもある



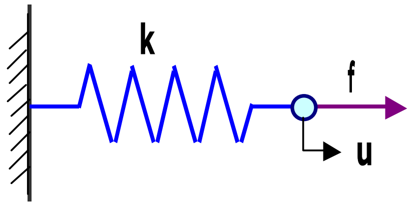
＊建物の固有周期：T　H(m)×(2〜3)%

§ 2　多自由度系の振動方程式

●多自由度系の静的平衡式

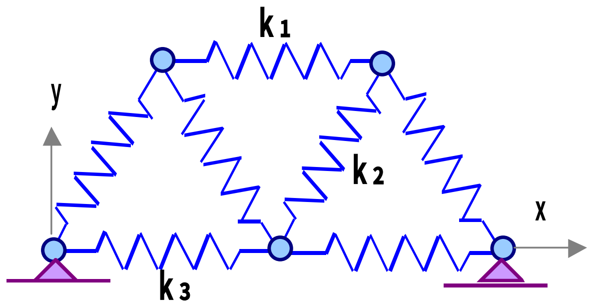
・１自由度のバネ系では、静的平衡条件が

$$k\,u = f \qquad (2.1)$$



となる。トラス構造はバネを二次元的に配置した多自由度系であり、その変形状態はヒンジ点の変位で記述される。１本のトラス部材を取出したとき、部材端の力はX,Y、変位はu,vの独立な２成分を有するから、この構造系の自由度は２成分×２点＝４自由度 になる。これらの成分をベクトル表示すると（※補足２）

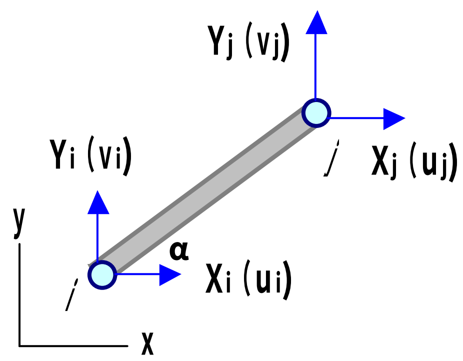
$$\{F\}_e = \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ X_j \\ Y_j \end{Bmatrix} \qquad \{U\}_e = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix}$$



となり、$\{F\}_e$と$\{U\}_e$の間には次の関係がある。

$$[K]_e\{U\}_e = \{F\}_e \qquad (2.2)※$$

これは形式的に式(2.1) と同形であり、異なる点は$\{F\}_e$と$\{U\}_e$が幾つかの成分からなる行列で表されることである。$[K]_e$は式(2.1)のバネ定数kに相当する行列で、剛性行列と呼ばれる。



・式(2.2) はトラス構造を構成する各部材で成立つから、部材毎に式を作成して全てを加え合わせれば、トラス構造全系の方程式が得られる。この方程式の形も、また式(2.2)と同様であり、構造全系に関する力{F}と変位{U}により

$$[K]\{U\} = \{F\} \qquad (2.3)$$

●多自由度系の振動方程式

・多自由度系の簡単な例は、質量mと Voigtモデル(k, c）を直列に配置したモデルで表される。前節から類推されるように、多自由度系の方程式は１自由度系の方程式を多変数に拡張したものと考えればよいから、１自由度系の 式(1.6)に対応して、振動方程式は次式で表される。

{U}：変位ベクトル
{f(t)}：荷重ベクトル
[M]：質量行列
[C]：減衰行列
[K]：剛性行列（静的問題と同じ）

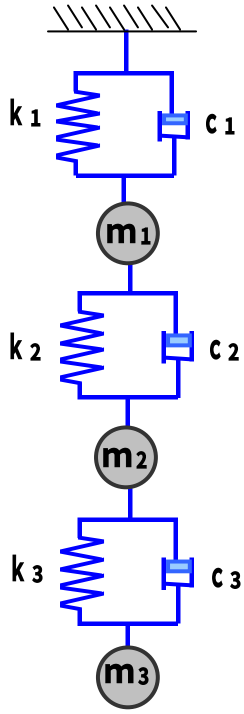
$$[M]\{U''\} + [C]\{U'\} + [K]\{U\} = \{f(t)\} \qquad (2.4)$$

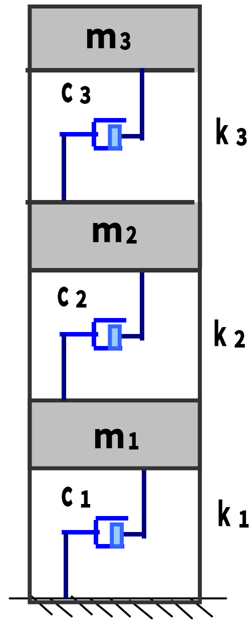
●質量行列[M]

・右図の構造系のように、集中質量を扱う場合は、対角線上に各質点の質量を並べた形になる。

$$[\mathrm{M}]=\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \qquad (2.5)$$

２次元問題では、ｘｙ成分に対応して同じ質量値が２度ずつ対角線上に現れる。





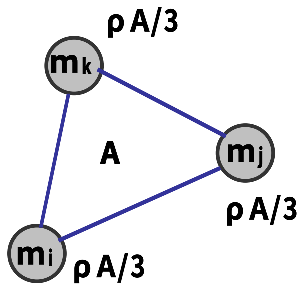
・連続体のように質量が分布する場合は、質量行列を作る方法に２つある。

　ＬＭ法：集中質量に換算する方法

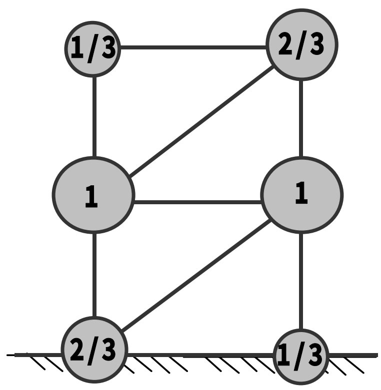
　ＣＭ法：エネルギー原理に基づく方法

ＣＭ法の方が合理性が高いが、計算が面倒であり、また精度的に抜群によい訳でもない。

・ＬＭ法では、各要素の質量を、その要素に属する節点に等分に振り分ける形で質量行列が作成される。例えば、三角形要素の場合、要素質量ρＡの 1/3ずつが３つの節点に振り分けられる。



・要素分割をいい加減に行うと、右図のように質量が一方に片寄る不都合が生じる。要素分割が粗いと、これが計算精度に大きく影響するので、注意を要する。



●減衰行列[C]

・減衰は、大別して粘性減衰と構造減衰に分類され、それぞれの特性から減衰行列の形は

$$減衰力=[\mathrm{C}]\{\mathrm{U}'\} \qquad (2.6)$$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_v & 0 \\ 0 & c_v \end{bmatrix}}_{粘性減衰} + \underbrace{\begin{bmatrix} c_s & -c_s \\ -c_s & c_s \end{bmatrix}}_{構造減衰}$$

となる。粘性減衰は質量行列[M]に、構造減衰は剛性行列[K]に形が似ていることが分かる。

・上記の性質を利用して、減衰行列[C]は質量行列[M]と剛性行列[K]の線形結合で作成することができ、各比例定数をα，βとして次式で表せる。これを比例減衰と呼ぶ。

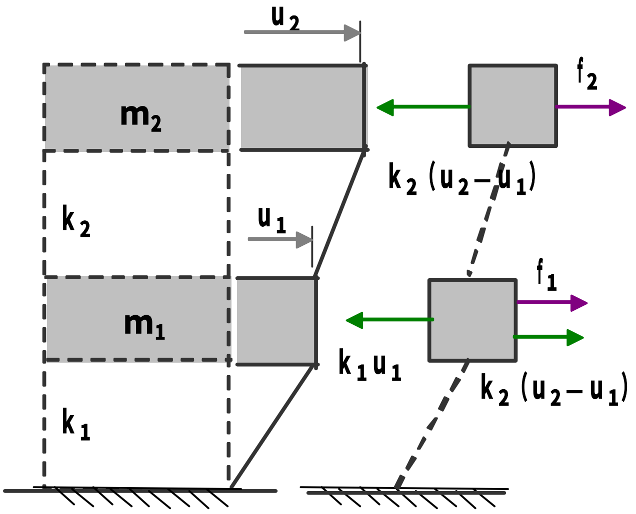
$$[\mathrm{C}]=\alpha[\mathrm{M}]+\beta[\mathrm{K}] \qquad (2.7)$$

●固有振動と固有振動形

・２自由度系の非減衰自由振動は式(2.4)より

$$[M]\{U''\}+[K]\{U\}=\{0\} \qquad (2.8)$$

$$[M]=\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \qquad [K]=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$



・この解は１自由度系の式(1.7)と同形に

$$\{U\}=\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix}\sin(\omega t+\phi)$$

と置けるから、上式に代入して整理すると

$$(-\omega^2[M]+[K])\{C\}=\{0\} \qquad (2.9)$$

$$\begin{bmatrix} k_{11}-\omega^2 m_1 & k_{12} \\ k_{21} & k_{22}-\omega^2 m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix}=\{0\}$$

C_1, C_2 が同時に０でない解を持つためには、上式の係数の行列式が０である必要があり、これから以下の振動数方程式を得る。

$$\omega^4+a_{km}\omega^2+b_{km}=0 \qquad (2.10)$$

上式を満たす解は２つあり(正の実根)、これらを $\omega_1^2<\omega_2^2$ と置くと、固有周期・振動数が

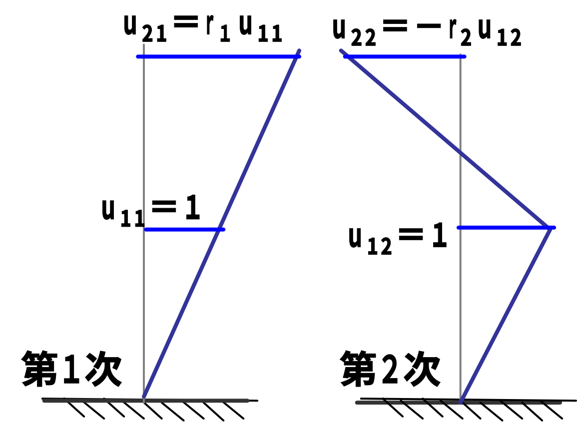
1次：$T_1=2\pi/\omega_1$,　$f_1=1/T_1=\omega_1/2\pi$
2次：$T_2=2\pi/\omega_2$,　$f_2=1/T_2=\omega_2/2\pi$

*質点外力を f_1, f_2 として、力のつり合い
質点1：$f_1+k_2(u_2-u_1)-k_1u_1=0$
質点2：$f_2-k_2(u_2-u_1)=0$
$k_{11}=k_1+k_2$，$k_{12}=k_{21}=-k_2$，$k_{22}=k_2$

・式(2.9)のωにω_1, ω_2を代入し、それぞれに対応する振幅比C_2/C_1を求めると

1次：$\dfrac{C_2}{C_1}=\dfrac{k_{11}-m_1\omega_1^{\ 2}}{-k_{12}}=\dfrac{u_{21}}{u_{11}}=r_1$

2次：$\dfrac{C_2}{C_1}=\dfrac{k_{11}-m_1\omega_2^{\ 2}}{-k_{12}}=\dfrac{u_{22}}{u_{12}}=-r_2$



これを（第１次・第２次）固有振動形と呼ぶ。振動形は変位の比であり、第１層の変位を１とした振動形を右図に示す。

・各層の振動u_1及びu_2は、２つの単弦振動の和で右式のように表され、それらの単弦振動ではu_1, u_2とも共通の周期と位相を持ち、両振幅の比は常に一定である。

$*u_1=C_1\sin(\omega_1 t+\phi_1)$
$\qquad +C_2\sin(\omega_2 t+\phi_2)$
$u_2=r_1C_1\sin(\omega_1 t+\phi_1)$
$\qquad -r_2C_2\sin(\omega_2 t+\phi_2)$

●一般的な固有値問題

・ｎ自由度の系に対し、式(2.9)は

$$[K]\{C\}=\omega^2[M]\{C\}$$

または

$$([K]-\omega^2[M])\{C\}=\{0\}$$

と表される。{C}の係数の行列式が０の条件から、固有値ω^2を求める特性方程式（ω^2 に関するｎ次方程式）が得られ、この解を原式に代入して対応する固有ベクトルが定まる。一般に、ｎ次の固有値問題にはｎ個の解が存在し

$$\omega_1^2,\ \omega_2^2,\ \ldots\ \omega_k^2\ \ldots,\ \omega_n^2$$

$$\{C\}_1,\ \{C\}_2,\ \ldots\{C\}_k\ \ldots,\ \{C\}_n$$

とすれば

$$\{U\}_k=(a_k\sin\omega_k t+b_k\cos\omega_k t)\{C\}_k \quad (k=1,2,\ldots,n)$$

はいずれも自由振動の方程式(2.8）の解になる。$\{U\}_k$ はｋ次の固有振動といい、その固有振動数は$\omega_k/2\pi$、固有振動モードは$\{C\}_k$である。自由振動の解は$\{U\}_k$の和

$$\{U\}=\{U\}_1+\{U\}_2+\cdots+\{U\}_n$$
$$=\Sigma_k(a_k\sin\omega_k t+b_k\cos\omega_k t)\{C\}_k \quad (k=1,2,\ldots,n)$$

として表すことができる。これがモード解析の基本的な考え方である。

＊一般に、(ｎ×ｎ)の正方行列[Ａ]に対し

$$[A]\{x\}=\lambda\{x\}$$

または

$$([A]-\lambda[I])\{x\}=\{0\}$$

なるような数値λと（{0}でない)ベクトル{ｘ}を見つける問題を固有値問題といい、λを[Ａ]の固有値、{ｘ}を[Ａ]の固有ベクトルという。左の振動問題では、$\lambda=\omega^2$, $[A]=[M]^{-1}[K]$, $\{x\}=\{C\}$ である。

＊[Ｉ]は対角が１の単位行列である。

＊$\lambda_k=\omega_k^2$, $\{x\}_k=\{C\}_k$ に対応する。

＊２次元、３次元応力場で主応力や主方向を求めるのも固有値問題の１つである。（※補足３）

・[M]，[Ｋ]が対称行列である通常の問題では、相異なる固有値ω_i, ω_j に対応する固有ベクトル$\{C\}_i$,$\{C\}_j$の間には次の関係が成り立つ。

$$\{C\}_i^T[M]\{C\}_j=0$$
$$\{C\}_i^T[K]\{C\}_j=0$$

これは広い意味の直交性であり“ [M]に関して直交する ”などという。

＊[Ａ]が対称行列なら、その固有ベクトルは直交する。すなわち、任意のｉ, ｊに対し

$$\{x\}_i^T\{x\}_j=0$$

振動問題では$[A]=[M]^{-1}[K]$ が対称にならないから、上記の直交性はない。

・固有ベクトル(振動形)は

$$\{C\}_i^T[M]\{C\}_i=1$$

のように長さを調整して表すことが多い。この操作を正規化という。

＊正規化後の固有ベクトルは

新$\{C\}_i=\{C\}_i/(\{C\}_i^T[M]\{C\}_i)^{0.5}$

と表される。

§３　振動解析手法

●振動シミュレーション

・単弦振動のような単純な振動問題では、解析解が既に得られている。一般の構造物の振動解析では、運動方程式を時刻歴に沿って数値的に解く必要がある。これがシミュレーションである。シミュレーションの基本的なやり方は、微小時間Δtごとに次々と振動状態を求めていく、差分的な方法である。振動問題によく用いられる方法に、Newmarkのβ法とWilsonのθ法がある。

＊最も単純な考え方では（オイラー法）

変位： $u_{t+\Delta t}=u_t+u_t'\Delta t$

（Δｔ秒後＝現在＋速度×Δｔ）

速度： $u_{t+\Delta t}'=u_t'+u_t''\Delta t$

（Δｔ秒後＝現在＋加速度×Δｔ）

これと振動方程式（例えば式(1.6)）の

$$u''=\{f(t)-ku-cu'\}/m$$

を組み合わせて計算を進める。

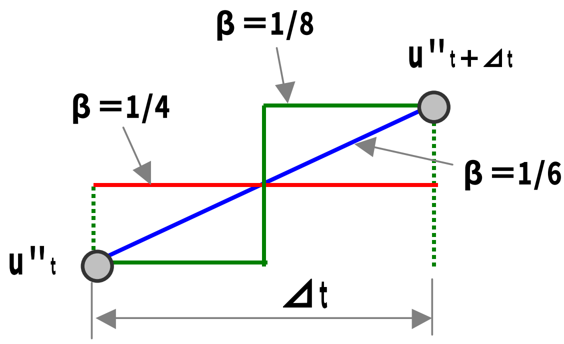
＊多自由度系では、$u\to\{U\}$，$m\to[M]$

・Newmarkのβ法では、$0\leqq\beta\leqq 1/2$ として

$$u_{t+\Delta t}=u_t+\Delta t\cdot u_t'+(\Delta t)^2/2\cdot u_t''+\beta(\Delta t)^2(u_{t+\Delta t}''-u_t'')$$

$$u_{t+\Delta t}'=u_t'+\Delta t\cdot(u_t''+u_{t+\Delta t}'')/2$$

とする。$\beta=1/6$ では、時刻tから$t+\Delta t$まで加速度が直線に変化すると仮定する線形加速度法に対応し、$\beta=1/4$ では、この間の平均加速度$(u_t''+u_{t+\Delta t}'')/2$ で一定に加速したことになる。（$\beta\geqq 1/4$ なら計算は無条件安定）実際の計算は、上の２式を運動方程式に代入して$u_{t+\Delta t}''$について解いた式



Newmarkのβ法（※補足４）

$$u_{t+\Delta t}''=\{m+(\Delta t/2)c+\beta(\Delta t)^2k\}^{-1}[f_{t+\Delta t}-c\{u_t'+(\Delta t/2)u_t''\}-k\{u_t+\Delta t\cdot u_t'+(1/2-\beta)(\Delta t)^2u_t''\}]$$

から、$t+\Delta t$時の外力$f_{t+\Delta t}$に対応する加速度$u_{t+\Delta t}''$を求め、これを上２式に代入して$u_{t+\Delta t}$，$u_{t+\Delta t}'$を求める手順となる。

・Wilsonのθ法は線形加速度法と同じであるが、運動方程式を$t+\Delta t$ より先の時点$t+\theta\Delta t$ $(\theta>1)$ に適用し、その前半$(t+\Delta t)$の部分だけを正式の解として採用する。つまり

$$u_{t+\theta\Delta t}=u_t+\theta\Delta t\cdot u_t'+(\theta\Delta t)^2/3\cdot u_t''+(\theta\Delta t)^2/6\cdot u_{t+\theta\Delta t}''$$

$$u_{t+\theta\Delta t}'=u_t'+\theta\Delta t(u_t''+u_{t+\theta\Delta t}'')/2$$

の２式を$t+\theta\Delta t$時点の運動方程式に代入して

$$u_{t+\theta\Delta t}''=\{m+(\theta\Delta t/2)c+(\theta\Delta t)^2/6\cdot k\}^{-1}[f_{t+\theta\Delta t}-c\{u_t'+(\theta\Delta t/2)u_t''\}-k\{u_t+\theta\Delta t\cdot u_t'+(\theta\Delta t)^2/3\cdot u_t''\}]$$

とし、これと時刻tの値：u_t''から $t+\Delta t$の値：$u_{t+\Delta t}''=\{(\theta-1)u_t''+u_{t+\theta\Delta t}''\}/\theta$を補間して求め、上２式で$\theta=1$ として$t+\Delta t$の変位・速度$(u_{t+\Delta t}$，$u_{t+\Delta t}'')$を逆算する。θの値として、通常は、$\theta=1.4$ が用いられる。

●モード解析

・前節で述べたように、固有振動を重ね合わせて動的応答を求める方法を、モード解析という。モード解析の利点は手軽にできることであるが、線形(定数係数)問題にしか適用できないのが最大の難点である。ｎ自由度の振動系にはｎ個の固有値があるが、実用上は、低次の固有振動を幾つか重ね合わせた近似解で十分である。

＊M直交：$\{C\}_i^T[M]\{C\}_j=0$

・固有値問題：$[M]\{U''\}+[K]\{U\}=\{0\}$ の解のうち、互いにM直交するものをｎ本選び、正規化したものを $\{C\}_1,\{C\}_2,...,\{C\}_n$ とし、これらを列ベクトルとする行列を

＊正規化：$\{C\}_i^T[M]\{C\}_i=1$ に長さ調整
$\{C\}_i=\{C\}_i/(\{C\}_i^T[M]\{C\}_i)^{0.5}$

$$[\Psi]=[\{C\}_1\{C\}_2\cdots\{C\}_n]$$

とする。振動方程式(2.4)の左から$[\Psi]^T$を乗じ、かつ $\{U\}=[\Psi]\{Y\}$ と置き換えると

$$[\Psi]^T[M][\Psi]\{Y''\}+[\Psi]^T[C][\Psi]\{Y'\}+[\Psi]^T[K][\Psi]\{Y\}=[\Psi]^T\{f(t)\}$$

になるが、$\{C\}_i$が$[M]$と$[K]$に関して直交することから、$[\Psi]^T[M][\Psi]$や$[\Psi]^T[K][\Psi]$は

$[\Psi]^T[M][\Psi]=$［ｎ次の単位行列］
$[\Psi]^T[K][\Psi]=$［ω_i^2を対角とするｎ次の対角行列］

となり、更に比例減衰$[C]=\alpha[M]+\beta[K]$を仮定すれば、$[C]$に関する項も

$[\Psi]^T[C][\Psi]=$［γ_iを対角とするｎ次の対角行列］

の形になる。したがって、$[\Psi]^T\{f(t)\}=\{g(t)\}$ と置換えると、振動方程式はｎ個の方程式

$$y_1''+\gamma_1 y_1'+\lambda_1 y_1=g_1(t)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_n''+\gamma_n y_n'+\lambda_n y_n=g_n(t)$$

に帰着する。これらを時刻ｔごとに個々に解いてｎ個のy_i を求め、重ね合わせて所要の解を得る。

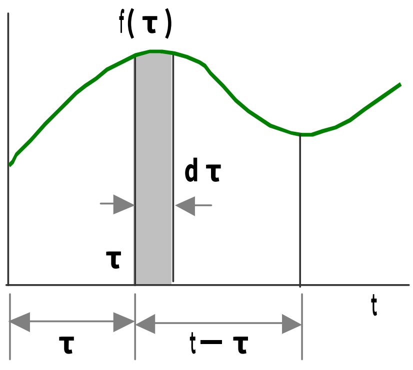
＊ Duhamel積分は、振動する外力をΔｔ刻みごとの力積のパルス：ｆ(t)Δｔ の連続作用と考え、各パルスによる運動を時間をずらしながら重ね合わせ(積分)計算する方法であり、１自由度系の不規則な外力による強制振動の計算に使われる。

・振動方程式： $mu''+cu'+ku=f(t)$ の初期条件（$u_0=0$, $u_0'=0$）に対する解は

$$u(t)=(1/m\omega')\int f(\tau)\exp(-h\omega(t-\tau))\times\sin\omega'(t-\tau)d\tau$$

（積分は$\tau=0\sim t$）

となる。これを Duhamel積分という。上のｙに関する解は、この積分を各モードごとに行って求めることになる。（ω,ω'は減衰がないとき、あるときの固有円振動数、ｈは減衰定数）



●応答スペクトル

・耐震設計において我々が最も必要とする情報は、想定地震動に対して設計対象の構造物が最大どのくらい揺れるかであって、振動解析を行って得られる振動の時刻歴は副次的なものである。振動方程式から知れるように、与えられた地震動(u_g'') に対して、応答に関連する因子は構造物の固有振動数ωと減衰定数hだけである。したがって、hとωのいろいろな組み合わせに対して u_g''による最大応答を前もって計算しておけば、設計時に応答計算をする必要がなく便利である。これを応答スペクトルと呼ぶ。

・各応答の最大値を$u_{max}, u_{max}', (u_g''+u'')_{max}$ とすると、これらの間には以下の関係があり、

$$u_{max}=Sv_{max}/\omega=Sv_{max}(T/2\pi)$$
$$u_{max}'=Sv_{max}$$
$$(ug''+u'')_{max}=\omega Sv_{max}=Sv_{max}(T/2\pi)$$

変位・速度・加速度応答スペクトルと呼ぶ。

・ある地点の応答スペクトルは同一でなく、地震の規模や震央距離によって変化する。したがって、その地点と同種の地盤で観測された多くの地震波に対して応答を求め、これらを平均化して使用する(標準応答スペクトル)。

＊右図は建設省が提案する加速度応答スペクトル
（200gal地震の平均応答
＋工学的判断で作成）

＊地震変位u_gによる強制振動の方程式は

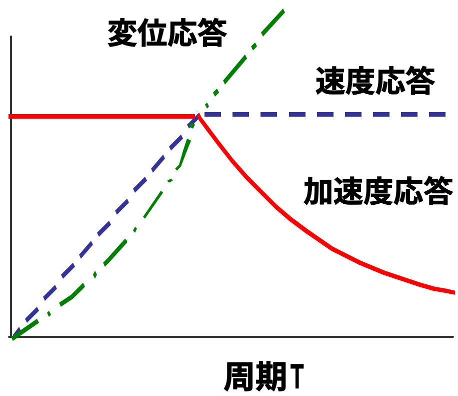
$$u''+2h\omega u'+\omega^2 u=-u_g''$$

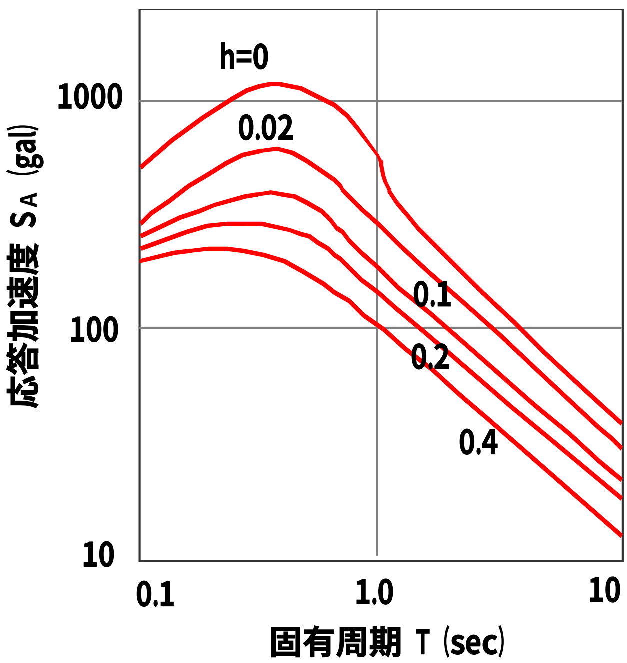
この解は、Duhamel積分により

$$u(t)=-(1/\omega')\int u_g''(\tau)\times\exp(-h\omega(t-\tau))\times\sin\omega'(t-\tau)d\tau$$

となり、相対変位応答uを得る。 以下、順次微分して、相対速度応答u'、加速度応答$u_g''+u''$という。

＊応答スペクトルの関係は下図のようになる。長周期の構造物では変位が大きくなるが、加速度応答は小さい。したがって、長周期構造物ほど設計震度を小さくとって良い。



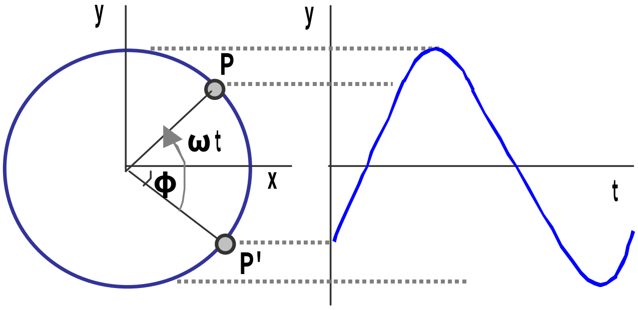


（※補足１）「振動している質点の運動は、ベクトルや複素数を用いて表示される。半径Ｃの円周上を点Ｐが、ｔ＝0でｘ軸と角φをなす点Ｐ'から、反時計回りに角速度ωで回転するとき、時刻ｔでベクトルＯＰのｘ、ｙ軸への正射影は各々

$$x = C\cos(\omega t - \phi)$$

$$y = C\sin(\omega t - \phi)$$

の単弦振動で表される。ベクトル表示を用いると、異なる振幅・角速度の単弦振動の合成が、ベクトルの和で表され、合成振動の振幅や位相差の関係が明瞭になる。



（※補足２）トラスの部材力(軸力)をＮ、伸び量をｅとすると、これらと力$\{F\}_e$及び変位$\{U\}_e$の関係は

$$\{F\}_e = \{-\cos\alpha\ \ -\sin\alpha\ \ \cos\alpha\ \ \sin\alpha\}^T N = \{B\}^T N$$

$$e = \{-\cos\alpha\ \ -\sin\alpha\ \ \cos\alpha\ \ \sin\alpha\}\{U\}_e = \{B\}\{U\}_e$$

であり、ｋを部材と等価なバネ($k = EA/L$)として

$$\{F\}_e = \{B\}^T N = \{B\}^T k\,e = \{B\}^T k\{B\}\{U\}_e = [K]_e\{U\}_e$$

$$[K]_e = \{B\}^T k\{B\} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} C^2 & CS & -C^2 & -CS \\ & S^2 & -CS & -S^2 \\ & & C^2 & CS \\ & sym & & S^2 \end{bmatrix} \qquad (C = \cos\alpha,\ \ S = \sin\alpha)$$

（※補足３）ｘｙ座標の応力成分($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$)から主応力($\sigma_1, \sigma_2$)を求める問題も固有値問題である。ｘｙ直角座標とα傾く面の方向余弦を $\{n\} = (l, m)^T$ とすると、α面に働く応力$\{p\} = (p_x, p_y)^T$と直角座標応力成分の関係は

$$p_x = \sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m$$

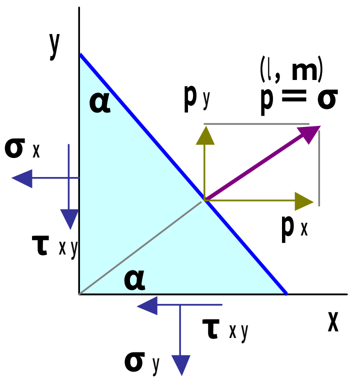
$$p_y = \tau_{xy} \cdot l + \sigma_y \cdot m \quad \to \{p\} = [s]\{n\}$$

となる。α面が主面のとき、$p_x = \sigma \cdot l$，$p_y = \sigma \cdot m$ であるから（σは主応力）

$$\{p\} = [s]\{n\} = \sigma\{n\}$$

$$\to\ \ ([s] - \sigma[I])\{n\} = \{0\}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} l \\ m \end{Bmatrix} = \{0\}$$



＊σ＝主応力＝固有値

＊{ｎ}＝主方向＝固有ベクトル（直交する）

＊直角座標応力成分

$$[s] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \qquad [I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

（※補足４）Newmarkのβ法の２つの式を再掲すると

$$u_{t+\Delta t}=u_t+\Delta t\cdot u_t'+(\Delta t)^2/2\cdot u_t''+\beta(\Delta t)^2(u_{t+\Delta t}''-u_t'')$$

$$u_{t+\Delta t}'=u_t'+\Delta t\cdot(u_t''+u_{t+\Delta t}'')/2$$

＜β＝1/4の場合＞　上の第２式と同形式で、ｔ＋Δｔ時点の変位は

$$\begin{aligned}u_{t+\Delta t}&=u_t+\Delta t\cdot(u_t'+u_{t+\Delta t}')/2\\&=u_t+\Delta t\cdot\{u_t'+u_t'+\Delta t\cdot(u_t''+u_{t+\Delta t}'')/2\}/2\\&=u_t+\Delta t\cdot u_t'+(\Delta t)^2/4\cdot(u_t''+u_{t+\Delta t}'')\end{aligned}$$

これは第１式でβ＝1/4とした場合に対応する。

＜β＝1/2の場合＞　Δｔ間でu_t''から$u_{t+\Delta t}''$へ変化するから、途中の時刻ηの加速度は

$$u_\eta''=u_t''+\eta\cdot(u_{t+\Delta t}''-u_t'')/\Delta t$$

積分して速度を求めると

$$\begin{aligned}u_\eta'&=u_t'+\int u_\eta''d\eta\\&=u_t'+u_t''\eta+(u_{t+\Delta t}''-u_t'')/\Delta t\cdot\eta^2/2\end{aligned}$$

ここでη＝Δｔと置くと、第２式と同じ表現を得る。変位については

$$\begin{aligned}u_{t+\Delta t}&=u_t+\int u_\eta'd\eta\\&=u_t+u_t'\Delta t+u_t''(\Delta t)^2/2+(u_{t+\Delta t}''-u_t'')/\Delta t\cdot(\Delta t)^5/6\\&=u_t+u_t'\Delta t+u_t''(\Delta t)^2/2+(\Delta t)^2/6\cdot(u_{t+\Delta t}''-u_t'')\end{aligned}$$

これは第１式でβ＝1/6とした場合に対応する。