

§ 2 平面トラスのマトリックス構造解析

(1) マトリックス構造解析の手順

手順1：1つの要素（部材）について力～変位関係式を作成する。

$$\{F\}_e = [K]_e \{U\}_e \quad \dots\dots \text{要素の「剛性方程式」}$$

$\{F\}_e$ ：「節点力ベクトル」

$\{U\}_e$ ：「節点変位ベクトル」

$[K]_e$ ：「剛性行列」

手順2：構造系全体の剛性方程式（連立一次方程式）を作成する。

$$\{F\} = [K]\{U\}$$

手順3：外力と変位の境界条件を導入し、節点変位 $\{U\}$ を未知数として、剛性方程式を解く。

手順4：節点変位 $\{U\}$ から、各要素内の“ひずみ、応力、部材力”等を計算する。

(2) 要素の剛性方程式

節点力・節点変位ベクトル

図 - 2.1(a) のように1つの部材要素を取り出し、節点力 (X, Y) と節点変位 (u, v) に節点番号 i, j を添字として付けると、各節点の力・変位成分は次のように行列表示される。

$$i \text{ 点} : \{F_i\} = \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \end{Bmatrix}, \quad \{U_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$$

$$j \text{ 点} : \{F_j\} = \begin{Bmatrix} X_j \\ Y_j \end{Bmatrix}, \quad \{U_j\} = \begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \end{Bmatrix}$$

力・変位成分を1つの要素についてまとめると

$$\{F\}_e = \{ \{F_i\}, \{F_j\} \}^T$$

$$\{U\}_e = \{ \{U_i\}, \{U_j\} \}^T \quad \text{より}$$

$$\{F\}_e = \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ X_j \\ Y_j \end{Bmatrix} \quad \{U\}_e = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix}$$

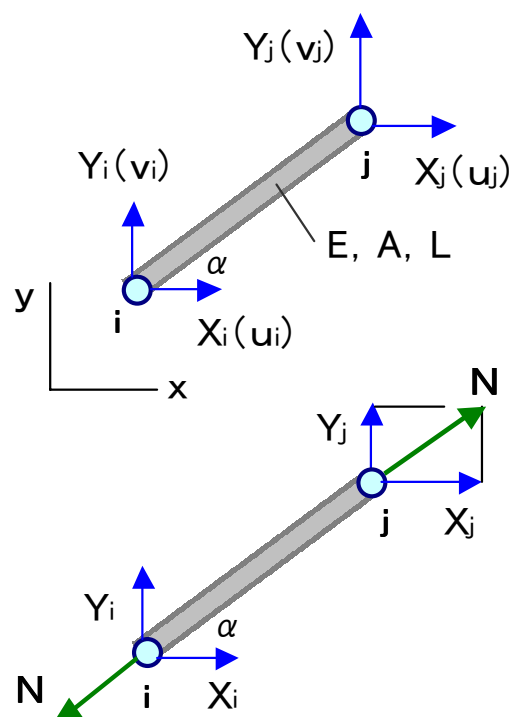


図 - 2.1 トラス部材

剛性方程式

トラス部材は軸方向の力と変形の関係だけで成立ち、バネと等価である。要素の剛性方程式は前章と同様に、以下の3つの基本式から誘導される。

* 力のつり合い式：トラスの部材力 s (= 軸力 N) と節点力ベクトル $\{F\}_e$ の関係
($s = N$ を引張力として $\{F\}_e$ と関係づける ~ 図 - 2.1(b))

$$\{F\}_e = \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ X_j \\ Y_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\cos \\ -\sin \\ \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \times s = \{B\}^T \times s \quad (2.1)$$

* 適合条件式：トラス部材の軸方向の伸び量 e と節点変位ベクトル $\{U\}_e$ の関係
(伸び量 $e = j$ 点と i 点の軸方向の相対変位)

$$\begin{aligned} e &= (u_j - u_i) \cos + (v_j - v_i) \sin \\ &= \{ -\cos \quad -\sin \quad \cos \quad \sin \} \{U\}_e \\ &= \{B\} \{U\}_e \end{aligned} \quad (2.2)$$

* バネの構成式：トラス部材の軸力 s (= N) と伸び量 e の関係を表すバネ常数 k は、部材の弾性率 E , 断面積 A , 長さ L から、 $k = EA/L$ で与えられる

$$s = N = k \times e = (EA/L) \times e \quad (2.3)$$

以上から ($C = \cos$, $S = \sin$ と置いて)

$$\{F\}_e = \{B\}^T \times s = \{B\}^T \times k \times e = \{B\}^T \times k \times \{B\} \{U\}_e = [K]_e \{U\}_e$$

$$[K]_e = \{B\}^T k \{B\} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} C^2 & CS & -C^2 & -CS \\ & S^2 & -CS & -S^2 \\ & & C^2 & CS \\ Sym. & & & S^2 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

剛性方程式の別誘導 (局所座標の導入)

図 - 2.2 のように部材の軸方向に局所座標 (x' , y') を導入し、関連する諸量に ' ' 記号を付けると、節点力成分と軸力 s 、及び節点変位成分と部材の伸び量 e の間には

$$-X_i' = X_j' = s (= N) \quad e = u_j' - u_i'$$

の関係があるので、上記の3つの基本式は以下のように表される。

*力のつり合い式：

$$\{F'\}_e = \{X_i' \ Y_i' \ X_j' \ Y_j'\}_e^T = \{-1 \ 0 \ 1 \ 0\}^T \times s = \{B\}^T \times s$$

*適合条件式：

$$e = \{-1 \ 0 \ 1 \ 0\} \\ \times \{u_i' \ v_i' \ u_j' \ v_j'\}_e^T \\ = \{B\} \{U'\}_e$$

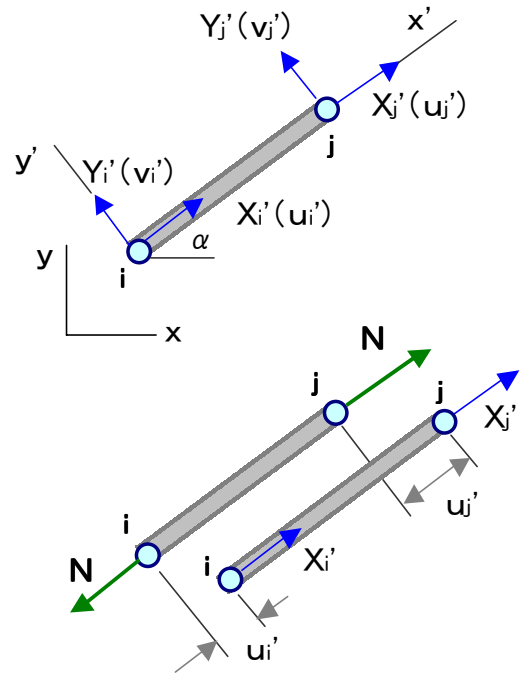
*バネの構成式：

$$s = N = k \times e = (EA/L) \times e$$

以上から、局所座標における剛性方程式は

$$\{F'\}_e = \{B\}^T \times k \times \{B\} \{U'\}_e \\ = [K']_e \cdot \{U'\}_e \quad (2.5)$$

$$[K']_e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



基準座標の方程式に直すためには座標変換が必要になる。
座標変換行列は前章の $[T]$ で $\quad = \quad$ とした

図 - 2.2 局所座標の導入

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos & \sin \\ -\sin & \cos \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & S \\ -S & C \end{bmatrix}$$

を2節点 (i, j) の成分を同時に変換するようにひとまとめにしたものになる。したがって、節点力 $\{F\}_e$ と $\{F'\}_e$ 及び節点変位 $\{U\}_e$ と $\{U'\}_e$ の座標変換として次式を得る。

$$[T] = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \\ 0 & 0 & -S & C \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \{F'\}_e &= [T] \{F\}_e \\ \{U'\}_e &= [T] \{U\}_e \end{aligned} \quad (2.6)$$

座標変換行列が直交行列： $[T]^{-1} = [T]^T$ であることに注意して、上式に式(2.5)を代入して整理すると、基準座標における方程式が次のように導かれ、式(2.4)と一致する。

$$\begin{aligned} \{F\}_e &= [T]^{-1} \{F'\}_e = [T]^{-1} [K']_e \{U'\}_e \\ &= [T]^T [K']_e [T] \{U\}_e \\ \{F\}_e &= [K]_e \{U\}_e \quad [K]_e = [T]^T [K']_e [T] \end{aligned} \quad (2.7)$$

(3) トラス構造全系の剛性方程式

全系の節点力 { F } と節点変位 { U }

具体例として図 - 2.3 に示す 3 要素 3 節点のトラスを考え、節点番号を 1~3、要素番号を ~ と付ける。このとき全系の節点力と変位は 6 成分で構成されるから

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \end{Bmatrix} \quad \{U\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

と表され、剛性方程式は次の形になる。

$$\{F\} = [K]\{U\}$$

各要素の剛性方程式

トラス構造を 1 つ 1 つの部材要素に分け、各要素に働く節点力成分を示したものが (b) 図である。表示の仕方は、上の添字が要素番号、下の添字が節点番号であり、例えば X_2^3 は要素 3 の節点 2 における x 方向の成分を意味する。変位は、各節点で連続していなければならないから、力成分のように要素ごとに区別する必要はない。このとき各要素の節点力・節点変位ベクトル $\{F\}_e, \{U\}_e$ は、その要素に関する成分だけを集めたもので表されるので、例えば要素 1 の剛性方程式は次の形で表される。

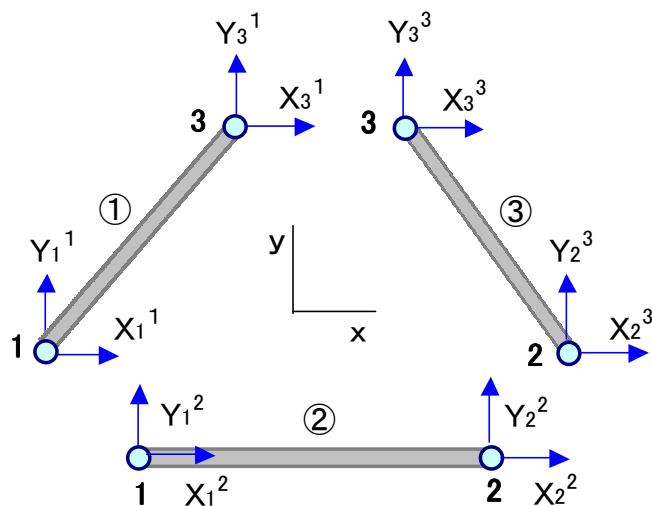
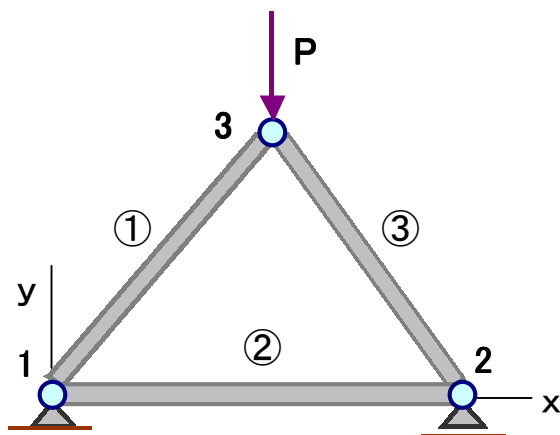


図 - 2.3 3 要素 3 節点トラス

$$\text{要素 1} : \begin{Bmatrix} X_1^1 \\ Y_1^1 \\ X_3^1 \\ Y_3^1 \end{Bmatrix} = [K_{ij}^1] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

k_{ij}^1 は要素 1 の剛性行列 $[k^1]$ の i 行 j 列の成分を意味する

$$\text{同様に、要素 2} : \begin{Bmatrix} X_1^2 \\ Y_1^2 \\ X_2^2 \\ Y_2^2 \end{Bmatrix} = [K_{ij}^2] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

$$\text{要素 3} : \begin{Bmatrix} X_2^3 \\ Y_2^3 \\ X_3^3 \\ Y_3^3 \end{Bmatrix} = [K_{ij}^3] \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

剛性方程式の結合

上で要素ごとに定義した節点力 (X_1^1, Y_1^1 等) を各節点で加え合わせたものが、全系の方程式における節点力 (X_1, Y_1 等) になることを考えて、以下のように剛性方程式を結合する。

$$\text{節点 1 : } \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1^1 \\ Y_1^1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} X_1^2 \\ Y_1^2 \end{Bmatrix} = \{F_1\} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \end{Bmatrix} : \text{節点外力}$$

$$= \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & k_{14}^1 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 & k_{24}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11}^2 & k_{12}^2 & k_{13}^2 & k_{14}^2 \\ k_{21}^2 & k_{22}^2 & k_{23}^2 & k_{24}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

$$\text{節点 2 : } \begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{31}^2 & k_{32}^2 & k_{33}^2 & k_{34}^2 \\ k_{41}^2 & k_{42}^2 & k_{43}^2 & k_{44}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11}^3 & k_{12}^3 & k_{13}^3 & k_{14}^3 \\ k_{21}^3 & k_{22}^3 & k_{23}^3 & k_{24}^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

$$\text{節点 3 : } \begin{Bmatrix} X_3 \\ Y_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{31}^3 & k_{32}^3 & k_{33}^3 & k_{34}^3 \\ k_{41}^3 & k_{42}^3 & k_{43}^3 & k_{44}^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{33}^1 & k_{34}^1 \\ k_{41}^1 & k_{42}^1 & k_{43}^1 & k_{44}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

全系の方程式における節点力 (X_1, Y_1 等) は、その節点に働く外力の成分 (F_{1x}, F_{1y} 等) に等しく、例えば節点 3 では $X_3 = F_{3x} = 0, Y_3 = F_{3y} = -P$ (節点力は鉛直上向きが正) である。このように、要素の剛性方程式の対応する成分を加え合わせると、全系の剛性行列 $[K]$ が以下のように得られる。要素の $[K]$ は対称行列であるから、全系の $[K]$ も対称行列になる。

$$[K] \{U\} = \{F\}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \\ k_{11}^1 + k_{11}^2 & k_{12}^1 + k_{12}^2 & k_{13}^2 & k_{14}^2 & k_{13}^1 & k_{14}^1 \\ k_{21}^1 + k_{21}^2 & k_{22}^1 + k_{22}^2 & k_{23}^2 & k_{24}^2 & k_{23}^1 & k_{24}^1 \\ k_{31}^2 & k_{32}^2 & k_{33}^2 + k_{11}^3 & k_{34}^2 + k_{12}^3 & k_{13}^3 & k_{14}^3 \\ k_{41}^2 & k_{42}^2 & k_{43}^2 + k_{21}^3 & k_{44}^2 + k_{22}^3 & k_{23}^3 & k_{24}^3 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{31}^3 & k_{32}^3 & k_{33}^3 + k_{33}^1 & k_{34}^3 + k_{34}^1 \\ k_{41}^1 & k_{42}^1 & k_{41}^3 & k_{42}^3 & k_{43}^3 + k_{43}^1 & k_{44}^3 + k_{44}^1 \end{bmatrix}$$

(4) 外力・変位の境界条件と方程式の解法

境界条件の導入

剛性方程式： $[K]\{U\} = \{F\}$ を、変位 $\{U\}$ を未知数とする連立一次方程式と考えた場合、定数項である節点力 $\{F\}$ の全ての成分が確定しないと方程式は解けないが、実際には力成分の代わりに変位成分が既知な節点もある。図 - 2.3 の例について、各節点での x, y 方向の既知な条件と未知量をまとめると下表のようになる。これらは“変位が既知なら力が未知”、逆に“力が既知なら変位が未知”の関係になっている。変位が既知な場合の未知な節点力は支点反力等に対応する。いずれにしても、この種の問題では未知量が力または変位に統一されていないので、連立一次方程式の解き方にも以下の2通りの方法が考えられる。

	既知の条件		未知量	
	x	y	x	y
節点 1	$u_1 = 0$	$v_1 = 0$	X_1	Y_1
節点 2	$X_2 = 0$	$v_2 = 0$	u_2	Y_2
節点 3	$X_3 = 0$	$Y_3 = -P$	u_3	v_3

解法 1：変数の分離

変位を未知 (u_2, u_3, v_3) と既知 (u_1, v_1, v_2) の成分に分け、対応して剛性行列 $[K]$ と節点力 $\{F\}$ を並べ替えると、剛性方程式は次のようになる (k_{ij} は並べ替える前の成分)

$$\begin{matrix} u_2 & u_3 & v_3 & u_1 & v_1 & v_2 \end{matrix}
 \begin{bmatrix} k_{33} & k_{35} & k_{36} & k_{31} & k_{32} & k_{34} \\ k_{53} & k_{55} & k_{56} & k_{51} & k_{52} & k_{54} \\ k_{63} & k_{65} & k_{66} & k_{61} & k_{62} & k_{64} \\ k_{13} & k_{15} & k_{16} & k_{11} & k_{12} & k_{14} \\ k_{23} & k_{25} & k_{26} & k_{21} & k_{22} & k_{24} \\ k_{43} & k_{45} & k_{46} & k_{41} & k_{42} & k_{44} \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ 0(u_1) \\ 0(v_1) \\ 0(v_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0(X_2) \\ 0(X_3) \\ -P(Y_3) \\ X_1 \\ Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$$

未知量と既知量の部分ごとに行列をまとめると、上下2つの方程式に区分できる。

$$\begin{bmatrix} [K_{AA}] & [K_{AB}] \\ [K_{BA}] & [K_{BB}] \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix} \{U_A\} \\ \{U_B\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_A\} \\ \{F_B\} \end{Bmatrix}$$

第1式： $[K_{AA}]\{U_A\} = \{F_A\} - [K_{AB}]\{U_B\}$ で $\{U_A\}$ を未知数として解く

右辺の $\{U_B\}$ の条件

- ・ 支点では $\{U_B\} = \{0\}$
- ・ 強制変位の問題では $\{U_B\} = \{ \}$

第2式： $\{F_B\} = [K_{BA}]\{U_A\} + [K_{BB}]\{U_B\}$ より、未知反力 $\{F_B\}$ が決定される。

解法 2 : 剛性行列の修正

[K] の並べ替えは面倒であるので、変位成分の順序を変えないで方程式を解くことを考える。
 例えば $v_2 =$ (ある値) なる変位の境界条件を導入する場合を考えると、原式は

$$\begin{aligned} k_{11}u_1 + k_{12}v_1 + k_{13}u_2 + k_{14}v_2 + k_{15}u_3 + k_{16}v_3 &= X_1 \\ \dots + k_{24}v_2 + \dots &= Y_1 \\ \dots + k_{34}v_2 + \dots &= X_2 \\ \dots + k_{44}v_2 + \dots &= Y_2 \\ \dots + k_{54}v_2 + \dots &= X_3 \\ \dots + k_{64}v_2 + \dots &= Y_3 \end{aligned}$$

$v_2 =$ を代入して右辺に移項することで未知数(変位)は 1 つ減るが、方程式の数は変わらない。
 これは v_2 が既知になった代わりに Y_2 が未知になったためであり、第 4 式は未知反力を求める式として残る。この式を削除すれば変位のみを未知数とする連立一次方程式になるが、変位成分の数と順序を元のままにしておくために、第 4 式にダミー - の式として $v_2 =$ を挿入する。この結果

$$\begin{aligned} k_{11}u_1 + k_{12}v_1 + k_{13}u_2 + 0 \cdot v_2 + k_{15}u_3 + k_{16}v_3 &= X_1 - k_{14} \\ \dots + 0 \cdot v_2 + \dots &= Y_1 - k_{24} \\ \dots + 0 \cdot v_2 + \dots &= X_2 - k_{34} \\ 0 \cdot u_1 + 0 \cdot v_1 + 0 \cdot u_2 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot u_3 + 0 \cdot v_3 &= \\ \dots + 0 \cdot v_2 + \dots &= X_3 - k_{54} \\ \dots + 0 \cdot v_2 + \dots &= Y_3 - k_{64} \end{aligned}$$

行列表示すると

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & 0 & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & 0 & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & 0 & k_{35} & k_{36} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & 0 & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & 0 & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 - k_{14} \\ Y_1 - k_{24} \\ X_2 - k_{34} \\ \\ X_3 - k_{54} \\ Y_3 - k_{64} \end{bmatrix}$$

となって { U } や [K] の成分の順序は変わらない。既知の変位成分ごとに上の修正を順次行えば、
 { U } の成分は全て未知、{ F } の成分は全て既知になり、通常形で連立一次方程式が解ける。

図 - 2.3 の例題に上の方法で境界条件を導入した場合の最終的な方程式は以下の形になる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} & 0 & k_{35} & k_{36} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{53} & 0 & k_{55} & k_{56} \\ 0 & 0 & k_{63} & 0 & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P \end{bmatrix}$$

(5) 部材応力の計算

節点の変位 $\{U\}$ が求めれば、要素ごとに伸び量や部材力が求まる。

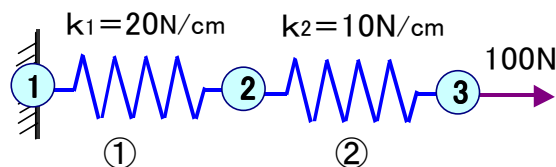
$$\text{伸び量} : e = \{B\} \{U\}_e \quad (2.2)$$

$$\text{部材力} : s = (EA/L) \times e \quad (2.3)$$

$$\text{部材応力} : \quad = s/A \quad (A : \text{部材断面積})$$

<例題> 前章のバネ系の例題をトラス構造解析の考え方で解く(下図)

固定端を含めたバネの端部点(節点)を 1~3 とし、バネ k_1, k_2 を要素 , とする。トラス構造と異なる点は y 方向成分がないことである。まず、バネごとに要素の方程式を作成すると次のようになる。



$$\text{要素} : \begin{Bmatrix} X_1^1 \\ X_2^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad \text{要素} : \begin{Bmatrix} X_2^2 \\ X_3^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

バネ常数の値が異なるが、要素の剛性行列は形式的には全く同じである。全系の方程式は

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{11} \\ X_{21} + X_{22} \\ X_{32} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

力・変位の境界条件は $u_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 100\text{N}$ であり、未知量は X_1 (反力)と u_2, u_3 になる。これらの条件を(解法1), (解法2)の2つの方法で取り入れると、最終的な方程式は

$$\text{解法 1} : \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & -k_1 \\ -k_2 & k_2 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 100 \\ X_1 \end{Bmatrix}$$

$$\text{解法 2} : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{Bmatrix}$$

(6) プログラムと計算例

```

C *****
C *
C *   ## truss.for ##           2000 Jan.
C *   Analysis of Plane Truss
C *
C *   INPUT = 40
C *   OUTPUT = 6 (print)
C *           = 41 (displacement)
C *
C *****
C
C                                     入力デ - タの説明
C   1 NELEM   ** NUMBER OF ELEMENT      ... 要素 ( 部材 ) の数
C   NPOIN    ** NUMBER OF NODAL POINT   ... 節点 ( ヒンジ ) の数
C   2 NOD(I,J) ** TWO NODAL POINTS OF ELEMENT ... 端部節点の番号
C   3 XY(I,J) ** X,Y-COORDINATES OF NODAL POINT ... 節点の x y 座標
C   4 KODE(I) ** BOUNDARY CONDITION      ... 変位の境界条件の指数
C                                     KODE=0/ X,Y-FREE      KODE=1/ X-FIX, Y-FREE
C
C                                     KODE=2/ X-FREE, Y-FIX      KODE=3/ X,Y-FIX
C   5 EA(I,J) ** EA(I,1)=YOUNG'S MODULUS OF ELEMENT      ... 部材のヤング率 E
C                                     EA(I,2)=CROSS SECTIONAL AREA OF ELEMENT      断面積 A
C   6 NTP     ** NUMBER OF NODAL POINTS WHERE LOAD IS APPLIED ... 荷重作用点の数
C   NP(I)    ** NODAL POINTS WHERE LOAD IS APPLIED      ... 作用点の番号
C   7 PXY(I,J) ** APPLIED LOAD ( X AND Y )      ... x y の荷重値
C
C   DIMENSION NOD(100,2),XY(80,2),KODE(80),U(80),V(80)      配列宣言
C   DIMENSION EA(100,2),C(4,4),LM(4),PXY(30,2),NP(30)
C   DIMENSION SL(100),CA(100),SA(100)
C   DIMENSION ST(160,160),P(160)
C
C   character*48 fname0,fname40,fname6,fname41
C   write(*,'(A)') '***** Analysis of Plane Truss *****'
C   write(*,'(A)') '           ( truss.for )'
C   write(*,'(A)') 'Input data file ==>> ./data/test.txt'
C   read(*,'(A)') fname0
C   open(1,file=fname0)
C   read(1,*) fname40,fname6,fname41      入出力ファイル名の読み込み
C   close(1)
C
C   open(40,file=fname40)
C   open( 6,file=fname6)
C   open(41,file=fname41)      入出力ファイルの open
C
C   READ(40,*) NELEM,NPOIN      デ - タ入力
C   READ(40,*) ((NOD(I,J),J=1,2),I=1,NELEM)      * 自由書式
C   READ(40,*) ((XY(I,J),J=1,2),I=1,NPOIN)      * 単位を統一すること
C   READ(40,*) (KODE(I),I=1,NPOIN)
C   READ(40,*) ((EA(I,J),J=1,2),I=1,NELEM)
C   READ(40,*) NTP,(NP(I),I=1,NTP)
C   READ(40,*) ((PXY(I,J),J=1,2),I=1,NTP)
C
C   WRITE(6,2005)      デ - タ出力

```

```

WRITE(6,2000) NELEM,NPOIN
WRITE(6,2001) (I,NOD(I,1),NOD(I,2),EA(I,1),EA(I,2),I=1,NELEM)
WRITE(6,2002) (I,KODE(I),XY(I,1),XY(I,2),I=1,NPOIN)
WRITE(6,2003) (NP(I),PXY(I,1),PXY(I,2),I=1,NTP)

```

C

```

2005 FORMAT(/1H , '*****'/1H , '*** INPUT DATA ***'
1 /1H , '*****')
2000 FORMAT(/1H , 'NELEM * NPOIN'//1H , I5, I8)
2001 FORMAT(/1H , 'ELEMENT DATA'//(1H , 3X, 'EL. ' , I2, 5X, 2I5, 5X, 'E=' , E12.4
1 , 5X, 'A=' , E12.4))
2002 FORMAT(/1H , 'POINT DATA'//(1H , 3X, 'P. ' , I2, I5, 5X, 'X=' , E12.4, 5X,
1 'Y=' , E12.4))
2003 FORMAT(/1H , 'APPLIED LOAD'//(1H , 3X, 'P. ' , I2, 8X, 'PX=' , E12.4,
1 5X, 'PY=' , E12.4))

```

C

```

NEQ=2*NPOIN
DO 10 I=1,NEQ
P(I)=0.0
DO 10 J=1,NEQ
10 ST(I,J)=0.0
DO 15 I=1,NPOIN
U(I)=0.0
15 V(I)=0.0

```

初期値の設定

C

C FORM STIFFNESS MATRIX

要素の剛性行列 [C] の作成

C

全体剛性行列 [ST] への組み込み

```

DO 100 N=1,NELEM
N1=NOD(N,1)
N2=NOD(N,2)
SLN=SQRT((XY(N1,1)-XY(N2,1))**2+(XY(N1,2)-XY(N2,2))**2)
CAN=(XY(N2,1)-XY(N1,1))/SLN
SAN=(XY(N2,2)-XY(N1,2))/SLN
CK=EA(N,1)*EA(N,2)/SLN
C2=CAN**2*CK
S2=SAN**2*CK
CS=CAN*SAN*CK
SL(N)=SLN
CA(N)=CAN
SA(N)=SAN
C(1,1)=C2
C(1,2)=CS
C(1,3)=-C2
C(1,4)=-CS
C(2,2)=S2
C(2,3)=-CS
C(2,4)=-S2
C(3,3)=C2
C(3,4)=CS
C(4,4)=S2
DO 20 I=2,4
I1=I-1
DO 20 J=1,I1
20 C(I,J)=C(J,I)
LM(4)=2*N2

```

... 部材長 L

... COS

... SIN

... EA/L

... 要素の剛性行列 [C]

```

LM(3)=LM(4)-1
LM(2)=2*N1
LM(1)=LM(2)-1
DO 200 I=1,4
DO 200 J=1,4
II=LM(I)
JJ=LM(J)
200 ST(II,JJ)=ST(II,JJ)+C(I,J)          ... 全体剛性行列 [ ST ]
100 CONTINUE
C
C   APPLICATION OF LOAD
C
DO 300 I=1,NTP                          荷重項 { P } の作成
NN=2*NP(I)
P(NN-1)=PXY(I,1)
300 P(NN )=PXY(I,2)
C
C   SPECIFY BOUNDARY CONDITION          変位の境界条件の導入
C
DO 500 N=1,NPOIN
KD=KODE(N)
IF(KD-1) 500,511,512
512 NN=2*N
511 NN=2*N-1
513 KD=KD-2
DO 520 I=1,NEQ
ST(NN,I)=0.0
ST(I,NN)=0.0
520 CONTINUE
ST(NN,NN)=1.0
P(NN)=0.0
IF(KD-1) 500,511,511
500 CONTINUE
C
C   SOLVE EQUATION                    連立一次方程式を解く
C                                     * SUB.SYMEQ ( GAUSS の消去法 ) の呼び出し
C                                     * 係数行列 = [ST] , 定数項 = {P} , 行列数 = NEQ
C                                     計算結果は { P } に入ってメインに戻る
CALL SYMEQ(ST,P,NEQ)
DO 600 N=1,NPOIN
U(N)=P(2*N-1)
600 V(N)=P(2*N)
WRITE(6,3000) (I,U(I),V(I),I=1,NPOIN)    変位の計算出力 (印刷用)
WRITE(41,*) (U(I),V(I),I=1,NPOIN)       変位の計算出力 (ファイル用)
3000 FORMAT(//1H , '***** RESULTS OF ANALYSIS *****'
1      //1H , 'DISPLACEMENTS *****' //1H ,3X, 'P.' ,12,5X,
2      'U=' ,E12.4,5X, 'V=' ,E12.4))
C
C                                     軸力(FA)と軸応力(STA)の計算
WRITE(6,4000)
4000 FORMAT(//1H , 'AXIAL FORCES AND STRESSES *****' /)
DO 800 N=1,NELEM
N1=NOD(N,1)
N2=NOD(N,2)
STA=-U(N1)*CA(N)-V(N1)*SA(N)+U(N2)*CA(N)+V(N2)*SA(N)
STA=EA(N,1)/SL(N)*STA

```

```

      FA=STA*EA(N,2)
      WRITE(6,4001) N,FA,STA
4001 FORMAT(1H ,3X, 'E. ', I2,5X, 'FA=', E12.4,5X, 'STA=', E12.4)
      800 CONTINUE
C
      close(40)
      close(6)
      close(41)
C
      STOP
      END
C
      SUBROUTINE SYMEQ (ST,P,NN)
      DIMENSION ST(160,160),P(160)
      DO 100 N=1,NN
      N1=N+1
      P(N)=P(N)/ST(N,N)
      IF(N-NN) 200,300,200
200 DO 400 J=N1,NN
      IF(ST(N,J)) 500,400,500
500 ST(N,J)=ST(N,J)/ST(N,N)
      DO 600 I=J,NN
      ST(I,J)=ST(I,J)-ST(I,N)*ST(N,J)
600 ST(J,I)=ST(I,J)
      P(J)=P(J)-ST(J,N)*P(N)
400 CONTINUE
100 CONTINUE
300 N1=N
      N=N-1
      IF(N) 700,700,800
800 DO 900 J=N1,NN
900 P(N)=P(N)-ST(N,J)*P(J)
      GO TO 300
700 RETURN
      END

```

軸力と軸応力の印刷出力

入出力ファイルの close

GAUSS の消去法
[ST] は対称行列

... 前進消去

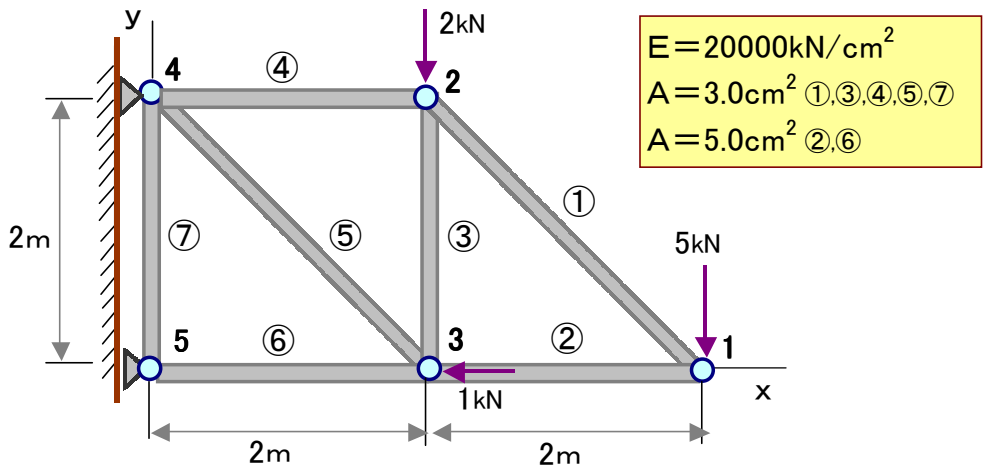
... 後退代入

計算例 / 入力データ / 出力結果

* 計算例：トラス構造の棚（7 部材要素、5 ヒンジ節点） 力・寸法単位 = (kN , cm)

部材の弾性率： $E = 200\text{kN/mm}^2 = 20,000\text{kN/cm}^2$

部材の断面積 $A = 3\text{ cm}^2$, 部材の断面積 $A = 5\text{ cm}^2$



* 計算時に必要な入力ファイル

・ truss.dat (入力データ)

```

7 5
1 2 1 3 2 3 2 4 3 4 3 5 4 5
400. 0. 200. 200. 200. 0. 0. 200. 0. 0.
0 0 0 3 1
20000. 3. 20000. 5. 20000. 3. 20000. 3. 20000. 3.
20000. 5. 20000. 3.
3 1 2 3
0. -5. 0. -2. -1. 0.
    
```

・ truss.txt (入出力ファイル名データ)

```

'./data/truss.dat'
'./data/truss.lst'
'./data/truss.fil'
    
```

* 計算結果の出力

・ truss.fil (変位値の自由書式出力)

```

-3.600000E-02 -0.215137 1.666667E-02 -0.115330 -2.600000E-02 -9.199668E-02
0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00
    
```

• truss.lst (変位・部材力の印刷形式出力)

*** INPUT DATA ***

NELEM * NPOIN

7 5

ELEMENT DATA

EL. 1	1	2	E=	0.2000E+05	A=	0.3000E+01
EL. 2	1	3	E=	0.2000E+05	A=	0.5000E+01
EL. 3	2	3	E=	0.2000E+05	A=	0.3000E+01
EL. 4	2	4	E=	0.2000E+05	A=	0.3000E+01
EL. 5	3	4	E=	0.2000E+05	A=	0.3000E+01
EL. 6	3	5	E=	0.2000E+05	A=	0.5000E+01
EL. 7	4	5	E=	0.2000E+05	A=	0.3000E+01

POINT DATA

P. 1	0	X=	0.4000E+03	Y=	0.0000E+00
P. 2	0	X=	0.2000E+03	Y=	0.2000E+03
P. 3	0	X=	0.2000E+03	Y=	0.0000E+00
P. 4	3	X=	0.0000E+00	Y=	0.2000E+03
P. 5	1	X=	0.0000E+00	Y=	0.0000E+00

APPLIED LOAD

P. 1	PX=	0.0000E+00	PY=	-0.5000E+01
P. 2	PX=	0.0000E+00	PY=	-0.2000E+01
P. 3	PX=	-0.1000E+01	PY=	0.0000E+00

***** RESULTS OF ANALYSIS *****

DISPLACEMENTS *****

P. 1	U=	-0.3600E-01	V=	-0.2151E+00
P. 2	U=	0.1667E-01	V=	-0.1153E+00
P. 3	U=	-0.2600E-01	V=	-0.9200E-01
P. 4	U=	0.0000E+00	V=	0.0000E+00
P. 5	U=	0.0000E+00	V=	0.0000E+00

AXIAL FORCES AND STRESSES *****

E. 1	FA=	0.7071E+01	STA=	0.2357E+01
E. 2	FA=	-0.5000E+01	STA=	-0.1000E+01
E. 3	FA=	-0.7000E+01	STA=	-0.2333E+01
E. 4	FA=	0.5000E+01	STA=	0.1667E+01
E. 5	FA=	0.9900E+01	STA=	0.3300E+01
E. 6	FA=	-0.1300E+02	STA=	-0.2600E+01
E. 7	FA=	0.0000E+00	STA=	0.0000E+00