有 限 要 素 法
（Finite Element Method）

愛知工業大学土木工学科
地盤研究室　　2006/Aug

§１　概　説

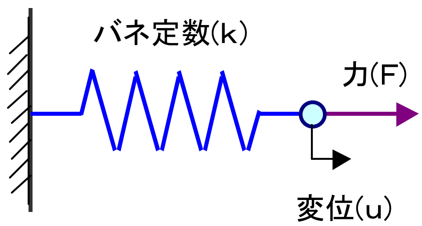
（１）『有限要素法』とは

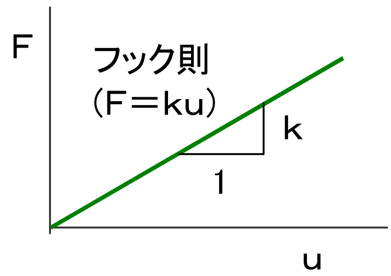
▼１自由度系の方程式

図ー1.１ のバネ系において、バネの先端に力Ｆが作用したとき、先端が静止位置からｕだけ変位した（バネがｕだけ伸びた）とすると、Ｆ～ｕ間には次の関係がある。

$$F = k \times u \qquad (1.1)$$

これは『フックの法則』であり、弾性挙動をバネで表現する基本式である。バネ定数ｋはＦとｕの比例関係から定まる。１本のバネでも１つの構造系であるから、上式は“系に働く力Ｆと系の変位（変形）ｕの関係”と考えてよい。バネ定数ｋは系の剛性と言える。この系は１つの点の１つの方向の変位ｕが系全体の変形状態を表すので『１自由度系』という。





図ー1.１　１自由度バネ系

▼多自由度系 ～ トラス要素の方程式

図ー1.２のトラスは７本の部材が５個のヒンジで結合された構造系である。トラス部材は軸方向の変形のみ許され、バネと等価であるから、この系は二次元配置されたバネ系と見なしてもよい。系の変形状態は部材（バネ）の端部点、つまりヒンジ点の変位によって表されるが、この場合は部材が二次元平面内にあるので、端部点に働く力やその変位はｘ，ｙ二方向の独立な成分をもつ。

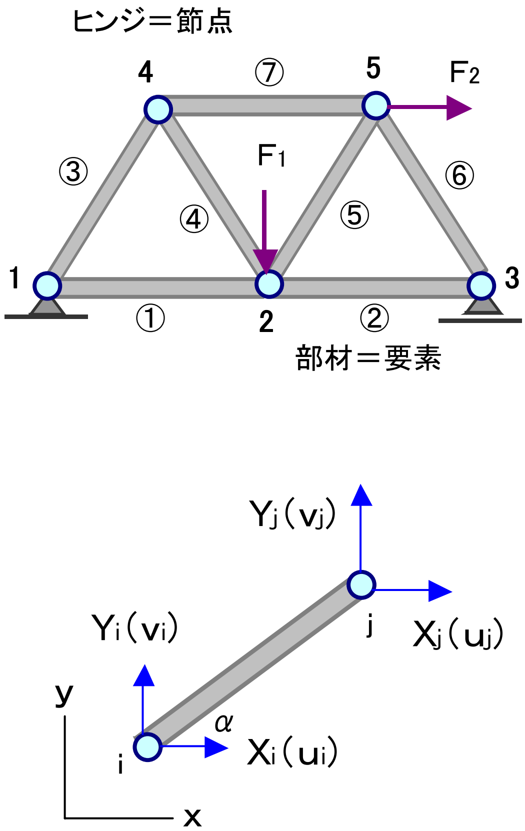
下図のように１本の部材を取り出したとき、部材端の力は（Ｘ，Ｙ）、変位は（ｕ，ｖ）の独立な２成分で表されるので、１本の部材に関する力と変位の成分は（ｘ，ｙ２成分）×２節点＝４成分＝４自由度 になる。これをベクトル表示すると

$$\{F\}_e = \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ X_j \\ Y_j \end{Bmatrix} \qquad \{U\}_e = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \qquad (1.2)$$

$\{F\}_e$ と $\{U\}_e$ は１本の部材を１つの系とみなしたときの系に働く力と系の変位を表している。後で詳しく述べるが、$\{F\}_e$ と $\{U\}_e$ の間には

$$\{F\}_e = [K]_e\{U\}_e \qquad (1.3)$$

の関係がある。これは形式的に式(1.1)と同形であり、異なる点は $\{F\}_e$ と $\{U\}_e$ が幾つかの成分からなる行列(ベクトルも含む)で表されることである。$[K]_e$ はバネ定数ｋに相当する行列で、系の剛性を表現するから『剛性行列(Stiffness Matrix)』と呼ばれる。有限要素法では部材のように構造系を構成する部分を『要素（element)』、ヒンジ点のように要素を連結する点を『節点（nodal point)』と称する。上式の各行列の添字ｅは“要素”の略である。



図－1.2　トラス構造

▼多自由度系 ～ トラス構造の方程式

各要素で式(1.3) が成り立つから、これらを全ての要素について加え合わせると、トラス構造全系の方程式を得る。図－1.2 のトラス構造は７個の要素と５個の節点で構成されているので、要素の方程式は７個できるが、構造全系に関連する力｛Ｆ｝や変位｛Ｕ｝は座標成分の数と節点の数で規定され

（ｘ，ｙの２成分)×５節点＝10 成分

の成分（10 自由度）を有し、ベクトル表示では

$$\{F\}=\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ \bullet \\ \bullet \\ X_5 \\ Y_5 \end{Bmatrix} \qquad \{U\}=\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \bullet \\ \bullet \\ u_5 \\ v_5 \end{Bmatrix} \qquad (1.4)$$

と表される。そして要素の方程式：式(1.3) を重ね合わせると、｛Ｆ｝と｛Ｕ｝の関係は

$$\{F\} = [K]\{U\} \qquad (1.5)$$

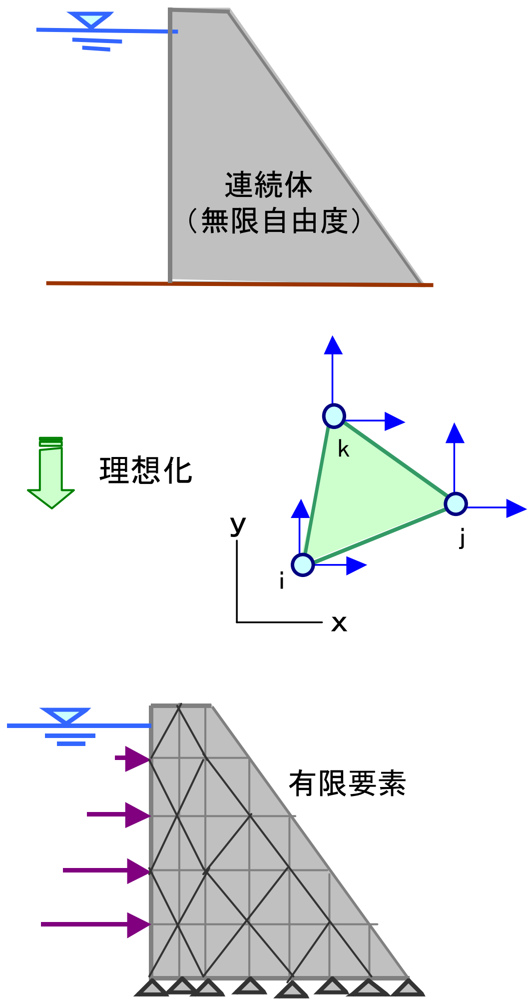
となる。これも１自由度系の方程式：Ｆ＝ｋ×ｕ と形式的に同形である。上式は変位｛Ｕ｝を未知数とする連立一次方程式であるから、与えられた力｛Ｆ｝に関して方程式を解けば構造系全体の変形状態が定まる。構造系内の力や応力は｛Ｕ｝から逆算される。

▼マトリックス構造解析

以上のように、１自由度のバネ系でも、多自由度のトラス構造系でも、系に働く力と系の変位の関係は基本的には Ｆ＝ｋ×ｕ の形で表される。多自由度系では力や変位成分の数が複数になるので、Ｆ，ｋ，ｕが行列で表示され、基本式：Ｆ＝ｋ×ｕ が連立一次方程式になる。 式(1.3)，式(1.5)等の要素や全系の方程式は、部材の性質や要素数、節点数あるいは構造形状とは無関係に成り立つので、どの問題に対しても常に一定の様式で計算処理を進めることができる。この利点を有効に活かすために、電子計算機を導入した構造解析法が提案され、行列算法を応用して構造解析を行うことから、『マトリックス構造解析法』と呼ぶ。

▼有限要素法

トラス構造は部材を１つ１つの構造要素として分割できる“不連続構造物”であるが、図－1.3 に示すダムのような構造体は無限個の質点で構成される“連続体構造物”であり、構造要素としての分割ができない。つまり連続体構造物は無限個の自由度を有し、変形様式（変形の仕方）も無限に存在する。しかし、このままでは問題を解くことができないので、連続体を下図のように有限個の要素に分割し、有限の自由度をもつ不連続構造物に近似化して応力・変形解析を行おうとする。これが『有限要素法（Finite Element Method)』の基本的な考え方である。下図では連続体を幾つかの三角形平面要素に分割している。１つの要素は３つの節点で囲まれるから（ｘ，ｙ×３節点)＝６成分＝６自由度 の力・変位成分をもつ。この場合も要素や構造系全体の方程式は、式(1.5) と同形の ｛Ｆ｝＝［Ｋ］｛Ｕ｝で表される。

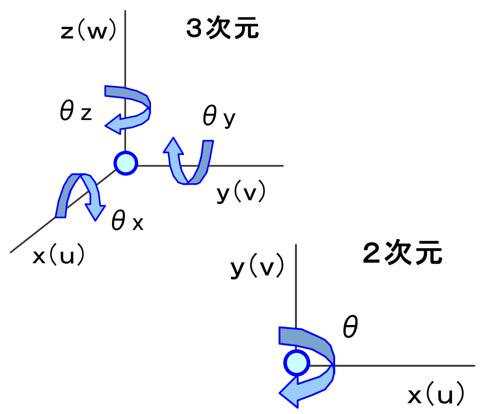


図－1.3　連続体構造物

※質点系と自由度（Degree of Freedom）

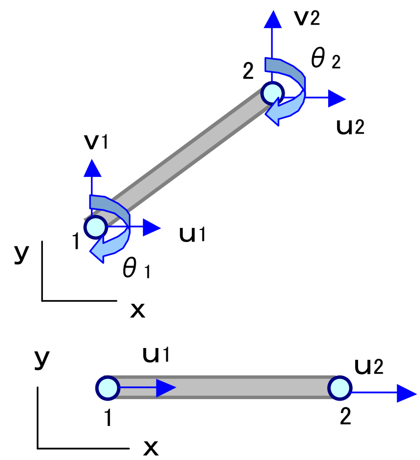
・『質点』とは質量をもつ実体点、『質点系』とは幾つかの質点をひとまとめに考えた系、『自由度』とは質点系の挙動を表現するために必要な独立な変位成分の数をいう。
・二次元平面内では、１つの質点の挙動が（x，y）の２方向の変位成分で表現されるので、１質点＝２自由度である。同様に、三次元空間では１質点＝３自由度（x，y，z）である。
・一般に、n質点系の自由度＝（１質点の自由度数）×（質点数n）である。

・部材端部の節点は無数の質点から成る“剛な球”とみなせる。剛であるから球内の質点は互いに位置を変えず、全質点が一体となって変位する
　＊二次元：３自由度（平行移動2＋回転1）
　＊三次元：６自由度（平行移動3＋回転3）



剛体点の自由度

・部材の自由度＝（１節点の自由度）×（２節点）
　＊トラスは軸方向の変形のみで回転成分なし
　　・平面＝（平行2）×(2節点)＝４自由度
　　・立体＝（平行3）×(2節点)＝６自由度
　＊はりは節点で曲げモーメントの伝達が可能
　　・平面＝（平行2＋回転１）×(2節点)
　　　　＝６自由度



平面部材の自由度

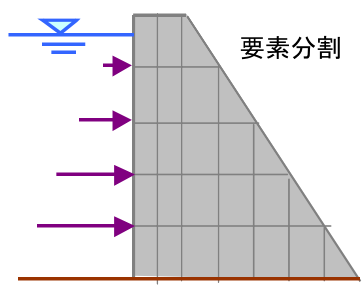
・図－1.2 の平面トラスは７個の部材で構成され、その変形状態は５つの節点の変位で記述される。支点の拘束がなければ全系の自由度は

(2自由度) ×(5節点)＝10自由度

しかし、支点１ではx，y両方向に拘束されているから u_1, v_1=0、また支点３ではy方向に拘束されているから v_3=0 である。構造系に拘束があると、既知な変位成分の数だけ自由度が減少するから、このトラス構造の自由度は結局 10−3＝7自由度で、独立な変位成分は

u_2, v_2, u_3, u_4, v_4, u_5, v_5

・連続体構造物は本来無限個の自由度を有するのでそのままでは解析不能である。有限要素法では、連続体を有限個の要素（自由度）に分割して理想化し、代表的な節点の変位量を求めて構造体の変形様式を調べる。



連続体の自由度

（２）行列算法

▼行列の表示

＊矩形行列（m行ｎ列，ｍ×ｎ行列）　　＊行ベクトル（１×ｎ）　　＊列ベクトル（ｎ×１）

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{bmatrix} \qquad \{B\}=\{b_1 \quad b_2 \quad b_3\} \qquad \{B\}=\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}$$

▼行列の種類

＊正方行列：ｎ＝ｍの行列

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

a_{ij}：行列のｉ行ｊ列の要素または成分

＊転置行列：行と列を入れ換えた行列（ｎ×m行列 ←→ ｍ×ｎ行列）
（行ベクトル ←→ 列ベクトル）

$$[A]^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\underset{(1\times3)}{\{B\}=\{b_1 \quad b_2 \quad b_3\}} \quad \rightarrow \quad \underset{(3\times1)}{\{B\}^T}=\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}$$

＊対称行列：$a_{ij}=a_{ji}$ の正方行列 ／ ［A］が対称行列なら［A］^{T}＝［A］

＊交代行列：$a_{ij}=-a_{ji}$（逆対称）の正方行列

＊対角行列：対角要素 a_{ii} 以外の成分が全て０の正方行列

＊単位行列：要素 a_{ii} が全て１の対角行列 ／ 数値の“１”に対応し、通常［Ｉ］で表す

＊零行列：要素が全てゼロの行列 ／ 数値の“0”に対応し、通常［０］や｛０｝で表す

＊帯行列：対角要素を挟んで、ある幅の帯内にのみ値があり、他の要素は０の正方行列
有限要素法の剛性行列［Ｋ］は、対称行列であり、かつ帯行列である

▼行列の加減算

＊同じ次数（ｍ×ｎ）の行列［A］［B］について成立ち、結果の［C］も同じ次数になる。
演算は対応する要素について行う。

$$\underset{[A]}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}} + \underset{[B]}{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}} = \underset{[C]}{\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}} \qquad (1.6)$$

▼行列の乗算

＊（m×p）の行列［A］と（p×n）の行列［B］について乗算が成立ち、その結果の行列［C］は（m×n）になる。対応する行列要素間には次の関係がある。

$$c_{ij} = \Sigma_k (a_{ik} \times b_{kj}) \quad (k = 1 \sim p) \qquad (1.7)$$

例えば、$c_{23} = a_{21} \times b_{13} + a_{22} \times b_{23} + a_{23} \times b_{33}$

$$\underset{}{[C]} = \underset{(2\times4)}{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{bmatrix}} = \underset{(2\times3)}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}} \underset{(3\times4)}{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{bmatrix}}$$

＊乗算の性質

・スカラー倍：$\lambda\,[A] = \lambda\,[a_{ij}] = [\lambda\, a_{ij}]$
・結合の法則：(［A］［B］)［C］＝［A］(［B］［C］)
・分配の法則：［A］(［B］±［C］)＝［A］［B］±［A］［C］

・正方行列の乗算で、一般には［A］［B］≠［B］［A］(交換法則の不成立)
・［A］≠［0］,［B］≠［0］でも［A］［B］＝［0］のときがある
・［A］［B］＝［A］［C］のとき、［B］＝［C］とは限らない

・ベクトル同士の乗算は矩形行列かスカラー（列ベクトル｛A｝,{B}に対し）
　$\{A\}\{B\}^T = [C]$（矩形行列）　$\{A\}^T\{B\} = c$（スカラー）

・転置行列の積：
$$([A][B][C])^T = [C]^T[B]^T[A]^T \qquad (1.8)$$

・単位行列の性質：　［A］［I］＝［I］［A］＝［A］　［I］［I］＝［I］

▼逆行列 ～ 行列の除算

＊正方行列［A］に対し、次式を満たす行列［A’］を「逆行列」と言い、$[A]^{-1}$ と書く。

$$[A][A'] = [I] \qquad (1.9)$$

例えば［A］［B］＝［C］のとき、両辺に左から $[A]^{-1}$ をかけると
　左辺：$[A]^{-1}[A][B] = [I][B] = [B]$　　右辺：$[A]^{-1}[C]$
より、$[B] = [A]^{-1}[C]$となり、除算のような演算ができる。つまり、スカラーにおける
ａｂ＝ｃ → ｂ＝ｃ／ａ の除算と形式的に同じである。

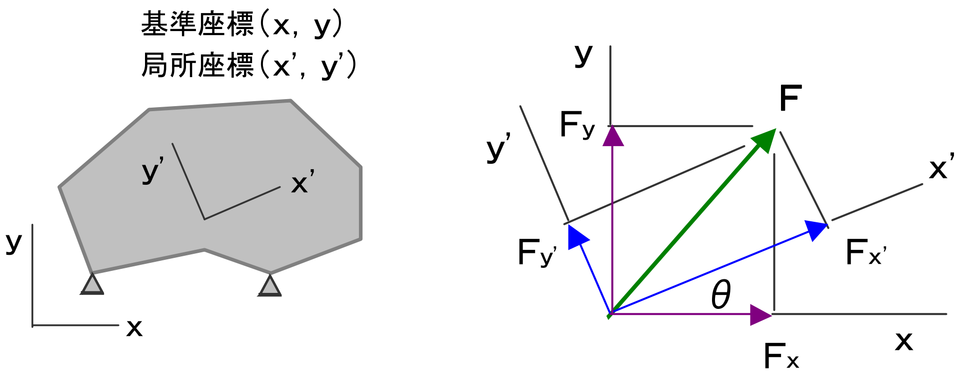
＊逆行列の性質

・$([A][B])^{-1} = [A]^{-1}[B]^{-1}$
・ 直交行列：$[A]^T[B] = [I]$ のとき $[A]^{-1} = [A]^T$

（３）行列の応用

▼座標変換

＊平面内の座標は水平・鉛直方向に基準の（ｘ，　ｙ）をとるのが普通であるが、問題の性質によっては一時的に傾いた座標系（ｘ’，ｙ’）を用いて関係式を記述した方が便利な場合がある。このとき、（ｘ，　ｙ）を「基準座標」、（ｘ’，　ｙ’）を「局所座標」と呼ぶことがある。局所座標で表した関係式を基準座標の式に直す（あるいはその逆もある）場合、座標成分間の対応関係を定めておく必要があり、これを「座標変換」という。



図－1.4　座標変換

＊図－1.4 において、水平に対し角 θ 傾く局所座標（ｘ’，　ｙ’）の基準座標（ｘ，　ｙ）に対する方向余弦は次表で与えられる。

	ｘ	ｙ
ｘ’	cos（ｘ，　ｘ’）	cos（ｙ，　ｘ’）
ｙ’	cos（ｘ，　ｙ’）	cos（ｙ，　ｙ’）

→　$[T]=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

力、変位、座標などのベクトル量は、方向余弦の一次形式で座標変換が行われる。例えば、基準座標と局所座標で表した力を｛Ｆ｝及び｛Ｆ’｝として

$$\{F\}=\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} \qquad \{F'\}=\begin{Bmatrix} F_{x'} \\ F_{y'} \end{Bmatrix}$$

とすると、上の［Ｔ］（「座標変換行列」と呼ぶ）を用いて変換は次のように行われる。

$$\{F'\} = [T]\{F\} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} F_x' &= F_x\cos\theta + F_y\sin\theta \\ F_y' &= -F_x\sin\theta + F_y\cos\theta \end{aligned} \qquad (1.11)$$

または

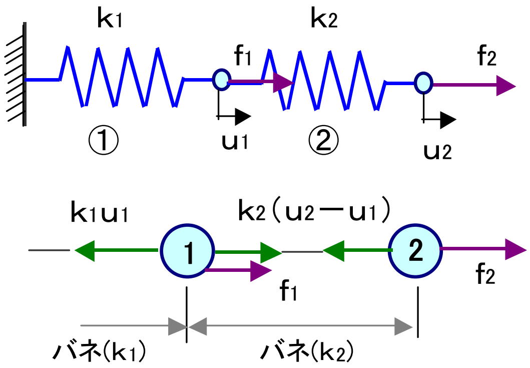
$$\{F\} = [T]^T\{F'\}$$

※座標変換行列は直交行列であり、$[T]^T = [T]^{-1}$

▼バネ系の方程式

＊図－1.5 の２つの直列バネ（k_1, k_2）で構成される系は２つの節点①，②の変位（u_1, u_2）で系の変形挙動が表されるので２自由度系である。

※本当は左端の節点を含めて３自由度であるが、固定端では変位が拘束され自由度が１つ減る。



図－1.5　２自由度バネ系

＊節点①，②に外力（f_1, f_2）が作用してバネが変形した結果、各節点に変位（u_1, u_2）が生じたとすると、２つのバネの伸び量とバネ力は、伸びと引張を正として

バネ(1)：伸び量 $e_1 = u_1$　　　バネ力 $s_1 = k_1 e_1 = k_1 u_1$
バネ(2)：伸び量 $e_2 = u_2 - u_1$　　　バネ力 $s_2 = k_2 e_2 = k_2(u_2 - u_1)$

となるから、各節点で力のつり合いを調べて、節点に働く力と変位の関係として

節点１：$f_1 = s_1 - s_2 = (k_1 + k_2)\, u_1 - k_2 u_2$
節点２：$f_2 = s_2 = -k_2 u_1 + k_2 u_2$

を得る。これを行列表示すると

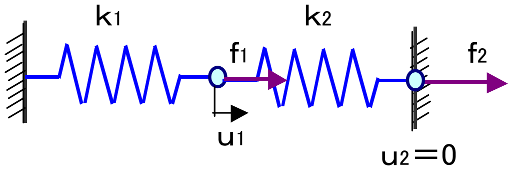
$$\{F\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [K]\{U\} \qquad (1.12)$$

これが２自由度バネ系の力～変位関係であり、１自由度の　F＝k×u　に対応する。バネが多数で自由度が増えた場合や、バネが二次元的に配置された場合（トラス構造）でも方程式の基本的な形や誘導は変わらないので、バネ系の解析はマトリックス構造解析の基礎となる。上式に見られるように、一般に剛性行列［K］は対称行列である。

＊計算例１：図－1.5 で、k_1＝20N/cm, k_2＝10N/cm, f_1＝0, f_2＝100N のとき

$$\begin{bmatrix} 30 & -10 \\ -10 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 100 \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \quad 答：u_1 = 5\text{cm},\ u_2 = 15\text{cm}$$

＊計算例２：右図のように節点②が固定、節点①に f_1＝50N の力が作用するとき、方程式は



$$\begin{bmatrix} 30 & -10 \\ -10 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 50 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

この場合は定数項｛F｝にも未知数が現れる。第１行から $30u_1 = 50$ → u_1＝1.67cm を得る。次に u_1 に値を入れて第２行を計算すると、固定端（節点②）の未知反力 f_2＝-16.7N が求まる。一般に１つの節点で、変位が既知なら力は未知、逆に力が既知なら変位は未知である。

▼バネ系の方程式の別誘導

＊式(1.12)の誘導は次のように整理できる。つまり、構造系が満たすべき基本式は以下の３つであり、これに境界の条件を与えて所要の問題が解ける。

①力のつり合い式：外力＝{F}と内力＝バネ力＝{S}は次の形で関係する

$$\{F\}=\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{Bmatrix}=[B]^T\{S\}$$

②適合条件式：外形状の変化＝変位＝{U} と内的な変形＝バネの伸び＝{E} は次の形で関係する。上の係数行列が［B］^{T}なら、変形の関係の係数行列は［B］ になる。

$$\{E\}=\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}=[B]\{U\}$$

③バネの構成式：バネ力＝{S} とバネの伸び＝{E} は、弾性ではフック則として関係し、バネ常数がバネの性質を表す。

$$\{S\}=\begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{Bmatrix}=[D]\{E\}$$

以上の３式を組み合わせると、式(1.12)が以下のように誘導される。

$$\{F\}=[B]^T\{S\}=[B]^T[D]\{E\}=[B]^T[D][B]\{U\}=[K]\{U\}$$

（４）連立一次方程式の解法（ガウスの消去法）

＊連立一次方程式の解法は種々あるが、ガウスの消去法が最も明解で精度もよいとされている。３元連立一次方程式を例にとって以下説明する。

［A］｛x｝＝｛b｝

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}$$

通常の形では

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \qquad (a)$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \qquad (b)$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \qquad (c)$$

＊前進消去：第１段階は式(ａ)を a_{11} で除して

$$1\cdot x_1 + (a_{12}/a_{11})x_2 + (a_{13}/a_{11})x_3 = b_1/a_{11} \qquad (d)$$

ここで、(ｂ)－(ｄ)×a_{21} および (ｃ)－(ｄ)×a_{31} を行うと、式(ｂ)，(ｃ)は

$$0\cdot x_1+(a_{22}-a_{21}a_{12}/a_{11})x_2+(a_{23}-a_{21}a_{13}/a_{11})x_3=b_2-a_{21}b_1/a_{11}$$
$$0\cdot x_1+(a_{32}-a_{31}a_{12}/a_{11})x_2+(a_{33}-a_{31}a_{13}/a_{11})x_3=b_3-a_{31}b_1/a_{11}$$

となる。　以上の３つの式を書き改めると、第２，３式では x_1 が見かけ上消えて

$$1\cdot x_1 + a_{12}' x_2 + a_{13}' x_3 = b_1' \qquad (d)$$
$$0\cdot x_1 + a_{22}' x_2 + a_{23}' x_3 = b_2' \qquad (e)$$
$$0\cdot x_1 + a_{32}' x_2 + a_{33}' x_3 = b_3' \qquad (f)$$

第２段階では式(ｅ)を a_{22}' で除して

$$1\cdot x_2 + (a_{23}'/a_{22}')x_3 = b_2'/a_{22}' \qquad (g)$$

更に（ｆ)−(ｇ)×a_{32}' として

$$0\cdot x_2 + (a_{33}' - a_{32}' a_{23}'/a_{22}')x_3 = b_3' - a_{32} b_2'/a_{22}'$$

となる。　以上の２式をまとめると、第２式で x_2 が見かけ上消えて

$$1\cdot x_2 + a_{23}'' x_3 = b2'' \qquad (g)$$
$$0\cdot x_2 + a_{33}'' x_3 = b3'' \qquad (h)$$

したがって、第３段階では式(ｈ)より x_3 が次式で決まり、前進消去が終了する。

$$1\cdot x_3 = b_3''/a_{33}'' \qquad (i)$$

＊後退代入：上で求めた x_3 を式(ｈ)に代入して x_2 を得、更に x_2, x_3 を式(ｄ)に代入して x_1 を得る。これが後退代入である。

※ガウスの消去法の FORTRAN プログラムを下図に示す。サブルーチンの形で記してあり、引数はＡ：係数行列［Ａ]、Ｂ：定数項｛ｂ}、ＮＮ：方程式の元数（未知数の数）である。連立一次方程式を解いた結果の｛ｘ｝はＢに蓄えられてメインプログラムに戻る。

```
      SUBROUTINE GAUSS(A,B,NN)
      DIMENSION A(50,50),B(50)
      NN1=NN-1
      DO 100 K=1,NN1
      PIV=A(K,K)
      K1=K+1
      DO 200 J=K1,NN
  200 A(K,J)=A(K,J)/PIV
      B(K)=B(K)/PIV
      DO 300 I=K1,NN
      Q=A(I,K)
      DO 400 J=K1,NN
  400 A(I,J)=A(I,J)-Q*A(K,J)
  300 B(I)=B(I)-Q*B(K)
  100 CONTINUE
C     BACK SUBSTITUTION
      B(NN)=B(NN)/A(NN,NN)
      DO 500 L=1,NN1
      K=NN-L
      K1=K+1
      DO 500I=K1,NN
  500 B(K)=B(K)-A(K,I)*B(I)
      RETURN
      END
```

●３元連立一次方程式のプログラムを作成し

$$\begin{matrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \\ 5 & 3 & -1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} \quad = \quad \begin{matrix} -15 \\ -8 \\ 19 \end{matrix}$$

の解が

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} \quad = \quad \begin{matrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{matrix}$$

となることを確かめよ。