第４章　有限要素法

4.1　離散系モデルの力学

（１）つり合い式

重さWの物体Ｂがバネに支えられている系を考える（図-4.1／1 自由度系）。物体Ｂに作用する力に着目すると、重さWが下向きに、バネに作用する（圧縮）力Ｓが上向きに働くから、上向きの力を正として系に働く力のつり合い式を書くと

$$S - W = 0 \quad \rightarrow \quad S = W \qquad (4.1)$$

次に、重さW_1，W_2の２つの物体B_1，B_2が３つのバネによって鉛直直線上に結び付けられている系を考える（図-4.2／2 自由度系）。この場合、「系全体に働く外力の総和がゼロ」というのも１つのつり合い式の形であるが、これだと系内の個々の物体やバネに働く力が不明である。そこで、通常は個々の物体に働く力に着目して、それぞれのつり合い式を書くのが普通である。考え方は図-4.1と同じであり、２つの方程式は次のようになる。

$$S_2 - S_1 = W_1 \qquad (4.2)$$
$$S_3 - S_2 = W_2$$

系に関わる物体の重さとバネ力を、個々の力を成分とするベクトル{W}と{Ｓ}としてまとめて表示すると、上式は行列表示で

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \quad [A]\{S\} = \{W\} \qquad (4.3)$$

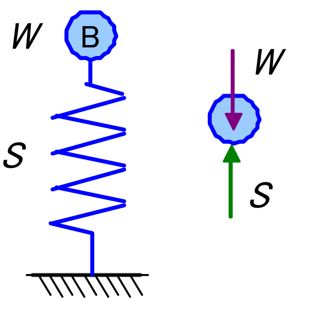


図-4.1　１自由度系

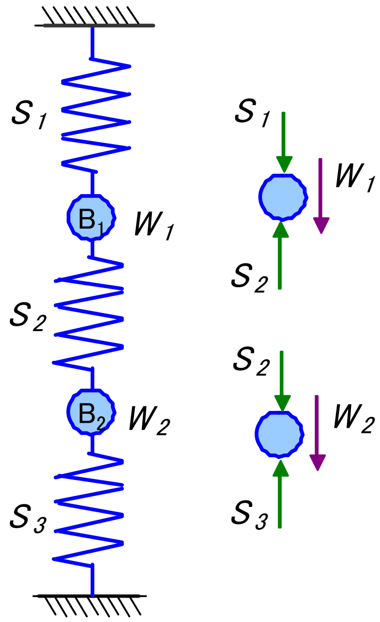


図-4.2　２自由度系

もっと一般的に、n 個の物体とバネを有する系を考える（図-4.3／n 自由度系)。個々の物体に着目して、それぞれのつり合い式を書くと

$$
\begin{aligned}
S_1 \quad\quad\quad &= W_1 \\
S_2 - S_1 &= W_2 \qquad (4.4) \\
\cdots\cdots&\cdots \\
S_n - S_{n-1} &= W_n
\end{aligned}
$$

となり、行列表示すると、形式的には式(4.3)と同形に表せて

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & & \\ & \bullet & \bullet & \bullet & & \\ 0 & & & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \bullet & \bullet & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \bullet \\ \bullet \\ S_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \bullet \\ \bullet \\ W_n \end{Bmatrix}
$$

$$\rightarrow \quad [A]\{S\} = \{W\} \qquad (4.5)$$

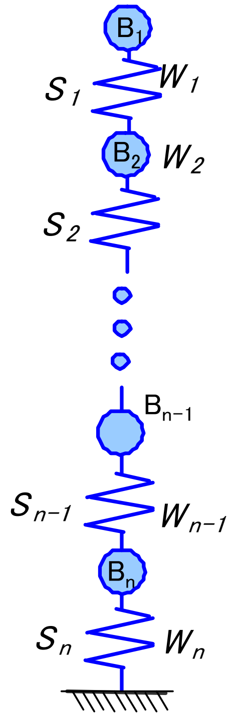


図-4.3　多自由度系

（２）適合条件式

「適合条件式」を簡単に言うと、“全体的な変形と局所的な変形の間の関係式” であり、力学的ではなく、幾何学的な概念で導かれる。図-4.1 の系が変形した状況を図-4.4 に示す。重力が作用していない状態を基準にして変形状態を見ると、重さWの作用によってバネが δ だけ縮み、その結果として物体Bは下方に u だけ変位する。この場合、系の代表点（物体の重心）の移動量 u が系の全体的な変形量、バネの圧縮量 δ が系の局所的な変形量とみなせる。したがって、この場合の適合条件式は次のように書ける。

$$u = \delta \qquad (4.6)$$

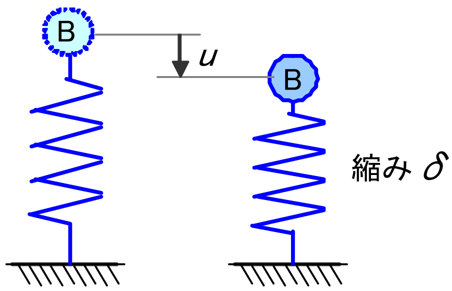


図-4.4　１自由度系の変形

次に図-4.2 の系に相当する変形状態を図-4.5 に示す。2 つの物体 B_1, B_2 の（下方への）変位量を u_1, u_2、3 つのバネの圧縮量を δ_1, δ_2, δ_3 とする。圧縮量を δ としているから、バネが伸びる場合は、δ は負値をとると考える。いずれにしてもバネの変形量 δ はバネ両端の物体の変位量の差（相対変位）で与えられるから、図の場合は u, δ の関係として

$$
\begin{aligned}
-u_1 \quad\quad &= \delta_1 \\
u_1 - u_2 &= \delta_2 \qquad (4.7) \\
u_2 &= \delta_3
\end{aligned}
$$

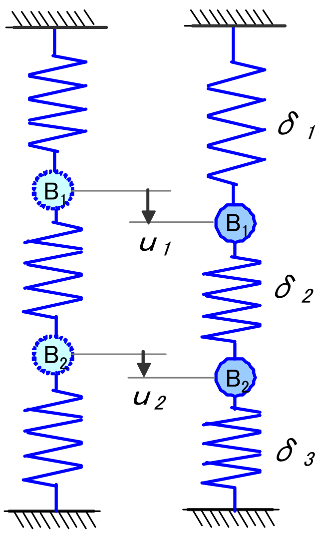


図-4.5　２自由度系の変形

を得る。これが、この系の適合条件式である。行列表示すると

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \quad [B]\{u\}=\{\delta\} \qquad (4.8)$$

上式を変位 u_i に関する方程式とみると、未知数（変位 u_i）の数より方程式の数が多いから、このような方程式は勝手に与えた右辺（圧縮量 δ_j）に対して解を持たない。解を持つには δ_j の間に何らかの関係、具体的には、上式から変位を消去して得られる関係が必要になる。これは第１章で「ひずみの適合条件式」として（変位を消去して）導いたひずみ成分同士の関係式に対応する。

最後に、図-4.3 のｎ個の物体とバネを有する系の変形状態を図-4.6 に示す。上と同じようにバネの変形量 δ_j と物体の変位量 u_i の関係を書くと

$$\begin{aligned} u_1 - u_2 &= \delta_1 \\ u_2 - u_3 &= \delta_2 \qquad (4.9) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ u_{n-1} - u_n &= \delta_{n-1} \\ u_n &= \delta_n \end{aligned}$$

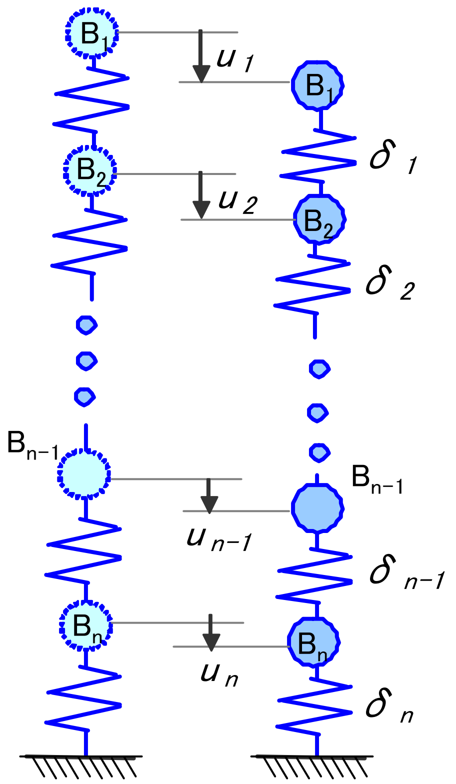


図-4.6　多自由度系の変形

行列表示すると、形式的に式(4.8)と同形に表せて

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \\ & & \bullet & \bullet & \bullet & \\ 0 & 0 & & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \bullet & \bullet & 0 \;\; 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \bullet \\ \bullet \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \bullet \\ \bullet \\ \delta_n \end{Bmatrix}$$

$$\rightarrow \quad [B]\{u\}=\{\delta\} \qquad (4.10)$$

式(4.5)のつり合い式と式(4.10)の適合条件式を比較すると、両者の係数行列はよく似ていて、次のように偶然に、互いに転置行列の関係にあることが分かる。

$$[A] = [B]^T \qquad (4.11)$$

本来、つり合い式と適合条件式は、互いを意識せずに独立に考察されるものであるが、何故か上のような奇妙な関係があり、この関係は後述するように二、三次元の系においても成立する。

（３）構成式

材料の局所的な変形と力の関係を表した式を構成式という。連続体の「応力～ひずみ関係」である。例えば、図-4.1 の場合は、バネ定数をｋとして

$$S = k \cdot \delta \qquad (4.12)$$

が構成式である。「構成式」という用語は「材料の力学的性格を定義するような規則」という内容を表すものと考えればよく、「弾性モデル（フックの法則）」は最も基本的な構成式である。図-4.2 及び図-4.3 の多自由度系では次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \bullet \\ S_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & \\ & \bullet & \bullet\ \bullet & 0 \\ 0 & & 0 & k_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \bullet \\ \delta_n \end{Bmatrix} \tag{4.13}$$

これらをまとめて行列表示すれば

$$\{S\}=[D]\{\delta\} \tag{4.14}$$

行列［D］は、弾性であれば対称行列になり

$$[D]=[D]^T \tag{4.15}$$

（４）力学の枠組み

以上の３つの関係式が力学の基本的枠組みであり、$[A]=[B]^T$と置き換えて再記すると

$$\begin{aligned} \text{つり合い式：}\quad & [B]^T\{S\}=\{W\} \\ \text{適合条件式：}\quad & [B]\{u\}=\{\delta\} \\ \text{構成式：}\quad & \{S\}=[D]\{\delta\} \end{aligned} \tag{4.16}$$

これらの枠組みは自由度の数や、二次元、三次元などに関わらず不変である。

さて、これらの関係を使って問題を解くために、通常は変位｛u｝を未知数とする。これを「変位法」といい、ＦＥＭのような計算機を用いる力学問題の解析手法はほとんどこの方法に準じている。式(4.16)を順次組み合わせると

$$\{S\}=[D]\{\delta\}=[D][B]\{u\} \ \rightarrow\ [B]^T\{S\}=[B]^T[D][B]\{u\}=\{W\}$$

となる。整理すると、上式は変位｛u｝を未知数とする連立一次方程式

$$[K]\{u\}=\{W\} \tag{4.17}$$

になり、外荷重{W}を定数項として解を求める問題に帰着する。この係数行列

$$[K]=[B]^T[D][B] \tag{4.18}$$

を「剛性行列」と呼ぶ。行列［D］が対称であれば、［K］も対称行列になる。

図-4.7 に具体例を示す。この問題では

$$[B]=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad [D]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \{W\}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

となるから、式(4.18),式(4.17)の演算をして、解{u}が以下のように定まる。

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9/11 \\ 8/11 \end{Bmatrix} \qquad (4.20)$$

そして、{u}を式(4.16)の第 2,3 式に順次代入して、バネの変形量{δ}とバネ力{S}を得る。

$$\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -9/11 \\ 1/11 \\ 8/11 \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -9/11 \\ 2/11 \\ 24/11 \end{Bmatrix}$$

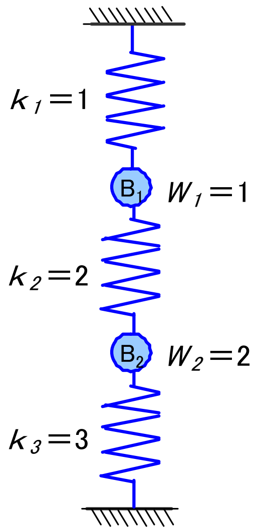


図-4.7　計算例

（５）仮想仕事の原理

式(4.16)の第 1,2 式に着目すると（構成式とは無関係に）つり合い式を満たす{S}と{W}、および適合条件式を満たす{u}と{δ}の間に、以下の内積の関係が成立する。(列ベルトル{a}, {b}の内積は$\{a\}^T\{b\}$と表される)

$$\{W\}^T\{u\} = \{S\}^T\{\delta\} \qquad (4.21)$$

左辺は外力と物体の変位の積和であるから「外力のなす仕事」といえる。一方、右辺は内部のバネに作用する圧縮力とバネの圧縮量の積和であるから、いわば「内力のなす仕事」といえる。したがって、上式は「仮想仕事の原理」に相当する。※1, ※2　証明は簡単で、式(4.16)の関係式を代入し、転置行列の性質を使って整理すればよい。

$$\text{左辺}:\{W\}^T\{u\} = ([B]^T\{S\})^T\{u\} = \{S\}^T[B]\{u\} = \text{右辺}:\{S\}^T\{\delta\}$$

図-4.3 と図-4.6 を見ながら、関係するベクトル成分を使って同じことを書き直してみると、より具体的な関係が認識され、理解し易い。

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= W_1 u_1 + W_2 u_2 + \cdots\cdots + W_n u_n && \text{＜定義＞} \\
&= S_1 u_1 + (S_2 - S_1) u_2 + \cdots\cdots + (S_n - S_{n-1}) u_n && \text{＜式(4.4)＞} \\
&= S_1(u_1 - u_2) + S_2(u_2 - u_3) + \cdots\cdots + S_n u_n && \text{＜並び替え＞} \\
&= S_1 \delta_1 + S_2 \delta_2 + \cdots\cdots + S_n u_n && \text{＜式(4.7)＞} \\
&= \text{右辺} && \text{＜定義＞}
\end{aligned}$$

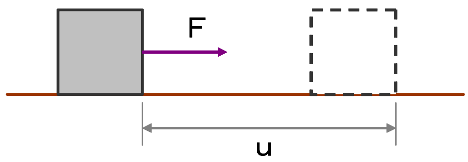
式(4.21)で理解しておかなければならないことは、「この式が力学的推論の結果として導かれたものではない」ということである。つまり、左辺と右辺が、それぞれ外力仕事と内力仕事に相当するから、たまたま「仮想仕事の原理」という力学的解釈が可能だということである。また、式(4.21)は構成式に独立であり、つり合い式に出てくる{S}や{W}は、適合条件式に出てくる{u}や{δ}と何の関係もないことである。弾性体であっても、なくても、「仮想仕事の原理」は成立する。

※1　仕事＝ひずみエネルギー

・物体に一定の力Ｆを加えた状態で、力の作用方向に変位ｕだけ物体を動かしたとき、物体には

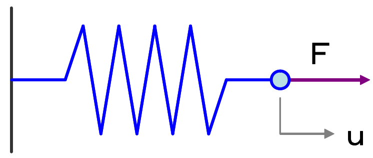
$$W = F \times u \qquad (1)$$

の（外力）仕事Wがなされたという。



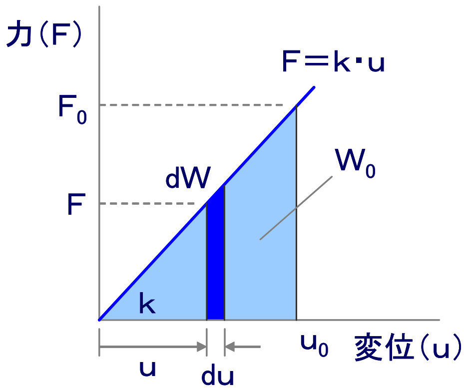
・弾性のバネを、先端に力を加えて伸ばす場合、バネに働く力Ｆとバネの伸び量ｕは、フック則により

$$F = k \times u \quad （k：バネ定数） \qquad (2)$$



なる比例関係があるから、伸びｕが生じている間の作用力Ｆは一定でない。このような場合、バネになされる外力仕事Wは、ある変位状態ｕ（作用力Ｆ）で微小伸びｄｕが生じた時になされる微小仕事 dW（＝Ｆ×ｄｕ）を、伸びゼロ状態から最終状態まで加算（積分）して求められる。すなわち、バネの最終伸び量をu_0としたとき、その状態までになされる総仕事量W_0は

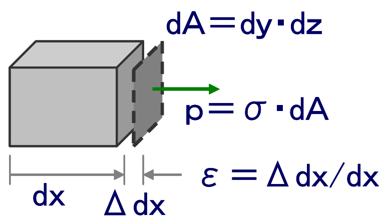
$$W_0 = \int_0^{u_0} dW = \int_0^{u_0} F \cdot du = k\int_0^{u_0} u \cdot du$$
$$= \frac{1}{2}k \cdot {u_0}^2 = \frac{1}{2}F_0 \cdot u_0 \qquad (3)$$

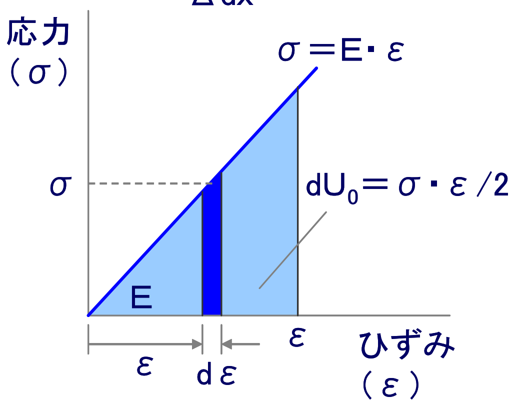


となり、Ｆ＝ｋ・ｕ線とｕ軸で囲まれる三角形の面積に相当する。外力仕事W（外力の作用）によってバネはひずみ、バネ内に“(弾性)ひずみエネルギーU”が蓄えられる。外力を除去すると、そのエネルギーは消失して、変形は元のゼロ状態に戻る。したがって

外力仕事（W）＝ひずみエネルギー（U）

・弾性体内の微小直方体要素（dV＝dｘdｙdz）を考える。いま、ｘ軸方向にだけ応力σとひずみεが生じているとすると、この直方体は末端のＸ面（dA＝dｙdｚ）に作用する力ｐ＝σdAの下でΔdｘ＝εdｘ　だけ伸びるから、この間に蓄えられるひずみエネルギーdU（外力仕事 dW）はバネの式(3)で　F_0＝ｐ、u_0＝Δdｘ　として





$$dU = \frac{1}{2}(\sigma dA)(\varepsilon dx) = \frac{1}{2}(\sigma\varepsilon)dV = dU_0 dV \qquad (4)$$

で与えられる。ここで、dUは微小要素 dV内に、dU_0は単位体積当りに蓄えられるひずみエネルギーを表す。弾性体であるから、σとεの間にはバネと同様の比例関係（フック則）

$$\sigma = E \times \varepsilon \qquad (\text{E：ヤング率}) \qquad (5)$$

が成り立ち、σ～ε関係が図の直線式で表される。このとき、dU_0 はσ～ε線とε軸に挟まれる三角形の面積に相当する。バネと同様に考えれば、三角形の面積に相当する仕事（ひずみエネルギー）dU_0は、ある応力状態σで微小変形ｄεが生じたときの微小仕事（図の柱状部分σｄε）を、ひずみがゼロの状態からεの状態まで加算（積分）したものに等しく、次式で表される。

$$dU_0 = \int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon} E\,\varepsilon \cdot d\varepsilon = \frac{1}{2} E \cdot \varepsilon^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma^2}{E} = \frac{1}{2} \sigma\,\varepsilon \qquad (6)$$

※2 仮想仕事の原理

・バネの問題に戻って、外力Ｆの作用の下で伸びｕが生じたとすると、外力仕事は Ｗ＝(Ｆ・ｕ)/2 で、これが物体内には同量のひずみエネルギーＵとして蓄えられる。このとき、バネの内部では、外力Ｆの作用により内力（応力σ）が発生し、それが内部的な変形（ひずみε）を引き起こし、その加算された結果が端部の変形（伸びｕ）として現れる。“外部的な”力と変形の積（Ｆ・ｕ）を外力仕事とすれば、式(4)，(6)のような“内部的な”力と変形の積（σ・ε）は内力仕事に相当すると考えてよい。

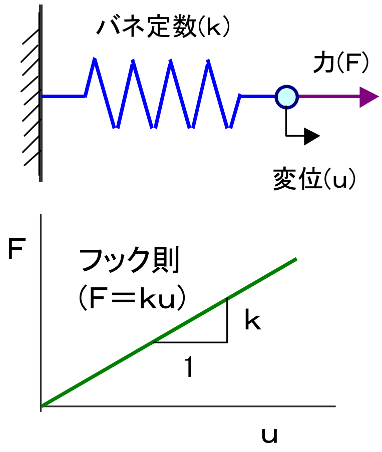
・上記のバネは外力Ｆの作用の下で伸びｕを生じ、つり合い状態にある。このときバネの先端を微小量δｕだけ“仮想的に”変位させると（実際に変位させるのでなく、外力Ｆのつり合い状態を保持したまま、想像上で微小量動かす)、その“仮想変位”δｕによってバネには“仮想外力仕事”δＷ（＝Ｆ×δｕ）がなされる。これを内部的に見ると、（Ｆ，ｕ）の外的条件に対応してバネ内では（応力σ，ひずみε）が発生し、つり合い状態にある。この状態に“仮想ひずみ”δε（仮想変位δｕによって生じたひずみ）が生じると、“仮想内力仕事”が $\delta U_0 = \sigma \cdot \delta\varepsilon$ と表される。

・｢仮想仕事の原理｣とは、“物体内に働く力がつり合い状態にあれば、物体の仮想的微小変位に対してそれらのなす仕事の総和はゼロである”と表現される。すなわち

$$\delta W = \delta U = \int_V \delta U_0\, dV \qquad (7)$$

あるいは、絶対値に着目して、“仮想外力仕事と仮想内力仕事が等しい”といってもよい。

（６）「有限要素法」とは



1自由度バネ系

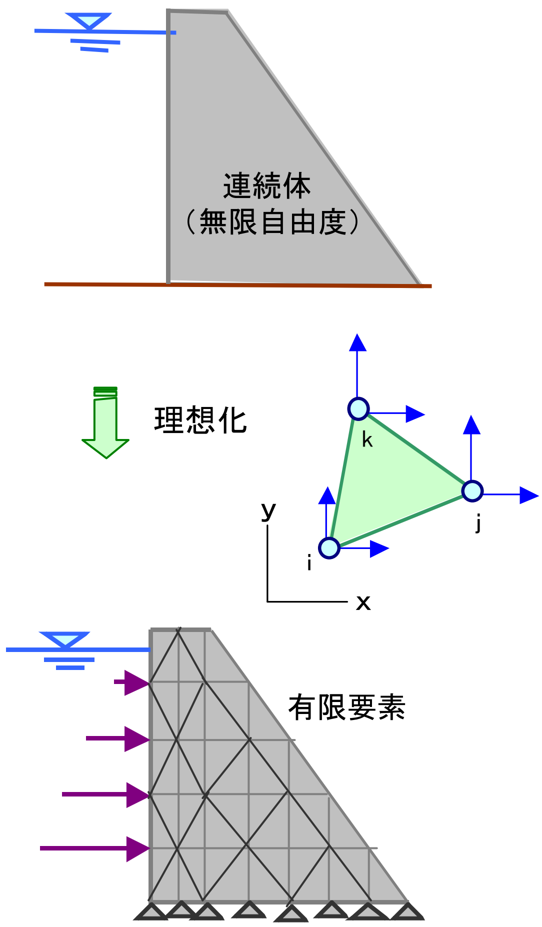
右図のバネ系において、バネの先端に力Ｆが作用したとき、先端が静止位置からｕだけ変位した（バネがｕだけ伸びた）とすると、Ｆ～ｕ間には次の関係がある。

$$F = k \times u$$

これは『フックの法則』であり、弾性挙動をバネで表現する基本式である。バネ定数ｋはＦとｕの比例関係から定まる。１本のバネでも１つの構造系であるから、上式は“系に働く力Ｆと系の変位(変形)ｕの関係”と考えてよい。バネ定数ｋは系の剛性と言える。この系は１つの点の１つの方向の変位ｕが、系全体の変形状態を表すので『１自由度系』という。

トラス部材は軸力のみを伝達し、かつ軸方向にのみ伸縮変形を生じるから、バネと等価である。部材を複数組み合わせたトラス構造系は、系の挙動が複数のヒンジ点における力・変位成分で表されるので『多自由度系』である。このとき、系の力および変位は複数の成分をもつベクトル$\{F\}$, $\{u\}$で表され、それらの関係は１自由度系の方程式（$F = k \times u$）と同形の $\{F\}=[K]\{u\}$ なる連立一次方程式で与えられる。$[K]$を剛性行列、$\{F\}=[K]\{u\}$ を剛性方程式と言う。

トラス構造は部材を１つ１つの構造要素として分割できる“不連続構造物”であるが、ダムのような構造体は無限個の質点で構成される“連続体構造物”であり、構造要素としての分割ができない。つまり連続体構造物は無限個の自由度を有し、変形様式（変形の仕方）も無限に存在する。しかし、このままでは問題を解くことができないので、連続体を下図のように有限個の要素に分割し、有限の自由度をもつ不連続構造物に近似化して応力・変形解析を行おうとする。これが『有限要素法（Finite Element Method）』の基本的な考え方である。下図では連続体を幾つかの三角形平面要素に分割している。この場合も構造系全体の方程式は、$\{F\}=[K]\{U\}$ で表される。



※質点系と自由度（Degree of Freedom）

・質点＝質量をもつ実体点
・質点系＝幾つかの質点をひとまとめに考えた系
・自由度＝質点系の挙動を表現するために必要な独立な変位成分の数（二次元：１質点＝２自由度、三次元：１質点＝３自由度）
・ｎ質点系の自由度＝(１質点の自由度数)×(質点数ｎ)

4.2　平面トラスのマトリックス構造解析

（1）構造系と要素の剛性方程式

平面トラスは、二次元的に配置されたバネ構造とみなせるから、前節で解説した一次元バネ系の力学がそのまま適用される。すなわち、図-4.8 のトラス構造では、部材がバネ、ヒンジ点が（バネの連結部で外力が作用する）物体点に対応する。前節との違いは力や変位がｘ，ｙ方向の独立な２成分を有する点である。構造系を解く最終的な方程式は、式(4.17)と同形式の連立一次方程式であり、記号Ｗを一般的な力を表す記号Ｆに書き改めて

$$[K]\{u\}=\{F\} \qquad (4.22)$$

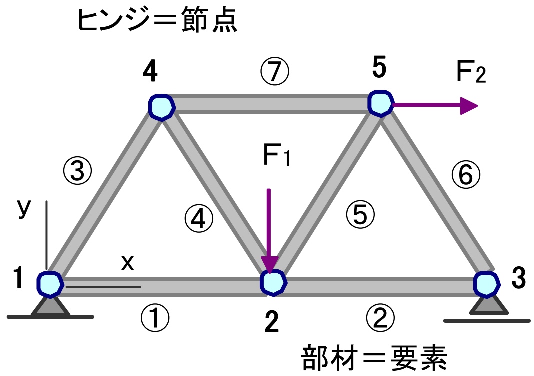
一般に、マトリックス構造解析では部材を“要素”、ヒンジ点を“節点”と称し、{ｕ},{Ｆ}をそれぞれ節点変位ベクトル、節点力ベクトルという。また、[Ｋ]を剛性行列、式(4.22)を剛性方程式と呼ぶ。

図-4.8 のトラス構造は７つの要素と５つの節点で構成され、１つの要素は端部の２節点ｉ，ｊに挟まれている。平面トラスでは、１つの節点はｘ，ｙ二方向の力・変位成分を有するから、各節点において節点力と節点変位は、それぞれ(Ｘ，Ｙ)，(ｕ，ｖ)を成分とする列ベクトルで以下のように表せる。

$$\text{i 点：}\ \{F_i\}=\begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \end{Bmatrix} \qquad \{u_i\}=\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$$

$$\text{j 点：}\ \{F_j\}=\begin{Bmatrix} X_j \\ Y_j \end{Bmatrix} \qquad \{u_j\}=\begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \qquad (4.23)$$

部材も１つの構造系であるから、式(4.22)の剛性方程式は一つ一つの要素に対しても成り立たなければならない。１つの部材要素には端部の２節点ｉ,ｊが関係するから、式(4.23)の節点力と節点変位のベクトルを要素に関してまとめて行列表示すると、要素を意味する添字を“ｅ”として



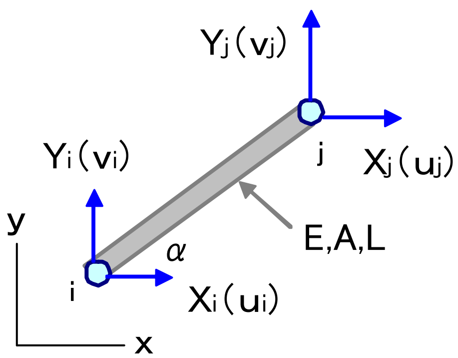


図-4.8　平面トラス

$$\{F\}_e=\begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ X_j \\ Y_j \end{Bmatrix} \qquad \{u\}_e=\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \qquad (4.24)$$

と表される。そして、これらの間には要素の剛性方程式として下式が成り立つ。

$$[K]_e\{u\}_e=\{F\}_e \qquad (4.25)$$

（２）要素の剛性行列

トラスのマトリックス構造解析の手順は、以下のようになる。

手順１：構造系内の要素（部材）の剛性行列［K］$_e$を作成する。図-4.8 で、１つの要素の特性を表すパラメータは、ヤング率Ｅ、」断面積Ａ、長さＬ、傾角αの４つである。

手順２：各要素について作成した［K］$_e$を集積し、構造全系の剛性行列［K］を作成する。

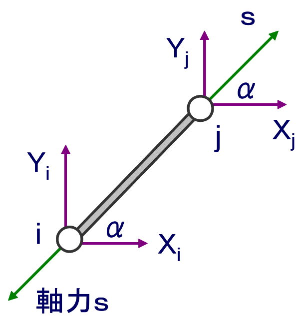
手順３：外力と変位の境界条件を導入し、節点変位{u}を未知数として、剛性方程式(4.22)を解く。実際には節点力{F}を定数項として連立一次方程式を解く問題になる。

手順４：変位解{u}から、各要素内のひずみ、応力、部材力などを計算する。

要素の剛性行列[K]$_e$の作成に際して、前節で述べた離散系モデルの力学がそのまま適用できる。力学の枠組みに関する３つの基本式は、図-4.8 の要素について以下のように書ける。

＊つり合い式：トラスの部材力ｓと節点力ベクトル｛F｝$_e$ の関係
ｓを引張力として、節点力X_i，Y_i等と関係づける

$$\{F\}_e=\begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ X_j \\ Y_j \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -\cos\alpha \\ -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{Bmatrix}\times s = \{B\}^T\times s \qquad (4.26)$$



＊適合条件式：トラス部材の軸方向の伸び量ｅと節点変位ベクトル｛u｝$_e$ の関係
伸び量ｅはｊ点とｉ点の軸方向の相対変位で表される
（行列｛B｝は行ベクトル）

$$\begin{aligned} e &= (u_j - u_i)\cos\alpha + (v_j - v_i)\sin\alpha \\ &= \{-\cos\alpha \quad -\sin\alpha \quad \cos\alpha \quad \sin\alpha\}\{u\}_e \\ &= \{B\}\{u\}_e \qquad (4.27) \end{aligned}$$

＊構成式：トラス部材の軸力ｓと伸び量ｅの関係
部材のバネ定数：ｋ＝ＥＡ/Ｌ（弾性率Ｅ，断面積Ａ，長さＬ）で表される

$$s = k\times e = (EA/L)\times e \qquad (4.28)$$

以上から、［K］$_e$が式(4.18)と同様に導け（Ｃ＝cosα，Ｓ＝sinα と置いて）

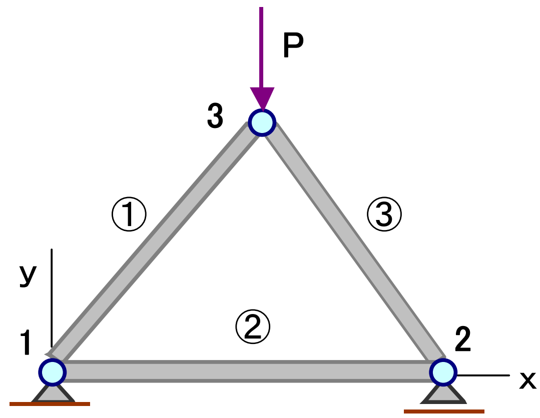
$$\{F\}_e = \{B\}^T\times s = \{B\}^T\times k\times e = \{B\}^T\times k\times\{B\}\{u\}_e = [K]_e\{u\}_e$$

$$[K]_e=\{B\}^T k\{B\}=\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} C^2 & CS & -C^2 & -CS \\ & S^2 & -CS & -S^2 \\ & & C^2 & CS \\ Sym. & & & S^2 \end{bmatrix} \qquad (4.29)$$

（３）構造全系の剛性方程式

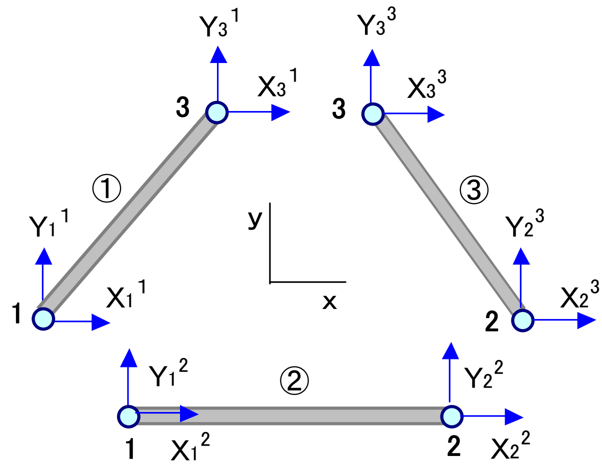
具体例として図−4.９に示す３要素３節点のトラスを考え、節点番号を 1〜3、要素番号を①〜③と付ける。このとき全系の節点力と変位は６成分で構成されるから

$$\{F\}=\begin{Bmatrix}X_1\\Y_1\\X_2\\Y_2\\X_3\\Y_3\end{Bmatrix}\quad\{u\}=\begin{Bmatrix}u_1\\v_1\\u_2\\v_2\\u_3\\v_3\end{Bmatrix}\qquad(4.30)$$



トラス構造を１つ１つの部材要素に分け、各要素に働く節点力成分を示したものが下図である。上の添字が要素番号、下の添字が節点番号であり、例えば X_2^3 は要素③の節点２における x 方向の成分を意味する。変位は、各節点で連続していなければならないから、力成分のように要素ごとに区別する必要はない。したがって、例えば要素①に関する節点力と節点変位のベクトルは

$$\{F^1\}_e=\begin{Bmatrix}X_1^1\\Y_1^1\\X_3^1\\Y_3^1\end{Bmatrix}\quad\{u^1\}_e=\begin{Bmatrix}u_1\\v_1\\u_3\\v_3\end{Bmatrix}$$



図−4.９　３要素３節点トラス

と表示できる。対応して、$[k^1]_e$を要素①に関する剛性行列、k_{ij}^1を $[k^1]_e$ の i 行 j 列の成分とすると、節点１では、要素①に関する節点力(X_1^1, Y_1^1)と要素②に関係する節点力(X_1^2, Y_1^2)の和が合計の節点力（X_1, Y_1）で、これが節点１に働く外力（F_{1x}, F_{1y}）に等しい。これを式表示すると

$$\begin{Bmatrix}X_1\\Y_1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}X_1^1\\Y_1^1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}X_1^2\\Y_1^2\end{Bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & k_{14}^1\\k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 & k_{24}^1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\v_1\\u_3\\v_3\end{Bmatrix}}_{\text{要素①}\downarrow}+\underbrace{\begin{bmatrix}k_{11}^2 & k_{12}^2 & k_{13}^2 & k_{14}^2\\k_{21}^2 & k_{22}^2 & k_{23}^2 & k_{24}^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\v_1\\u_2\\v_2\end{Bmatrix}}_{\text{要素②}\downarrow}=\begin{Bmatrix}F_{1x}\\F_{1y}\end{Bmatrix}$$

同様の式表示を節点２，３についても作成し、式(4.30)の全系の節点力、節点変位ベクトルの関係として剛性行列を“結合”すると、全系の剛性方程式が式(4.31)の形で得られる。なお、要素の剛性行列［K］$_e$ は対称行列であるから、全系の剛性行列［K］も対称行列になる。

$$[K]\{u\}=\{F\} \qquad (4.31)$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \\
[K]= & \multicolumn{6}{l}{\left[\begin{array}{cccccc}
k_{11}{}^1+k_{11}{}^2 & k_{12}{}^1+k_{12}{}^2 & k_{13}{}^2 & k_{14}{}^2 & k_{13}{}^1 & k_{14}{}^1 \\
k_{21}{}^1+k_{21}{}^2 & k_{22}{}^1+k_{22}{}^2 & k_{23}{}^2 & k_{24}{}^2 & k_{23}{}^1 & k_{24}{}^1 \\
k_{31}{}^2 & k_{32}{}^2 & k_{33}{}^2+k_{11}{}^3 & k_{34}{}^2+k_{12}{}^3 & k_{13}{}^3 & k_{14}{}^3 \\
k_{41}{}^2 & k_{42}{}^2 & k_{43}{}^2+k_{21}{}^3 & k_{44}{}^2+k_{22}{}^3 & k_{23}{}^3 & k_{24}{}^3 \\
k_{31}{}^1 & k_{32}{}^1 & k_{31}{}^3 & k_{32}{}^3 & k_{33}{}^3+k_{33}{}^1 & k_{34}{}^3+k_{34}{}^1 \\
k_{41}{}^1 & k_{42}{}^1 & k_{41}{}^3 & k_{42}{}^3 & k_{43}{}^3+k_{43}{}^1 & k_{44}{}^3+k_{44}{}^1
\end{array}\right]}
\end{array}
$$

（４）外力・変位の境界条件と方程式の解法

剛性方程式：[K]{u} ＝ {F} を、変位 {u} を未知数とする連立一次方程式と考えた場合、定数項である節点力 {F} の全ての成分が確定しないと方程式は解けないが、実際には力成分の代わりに変位成分が既知な節点もある。図-4.9 の例について、各節点でのｘ，ｙ方向の既知な条件と未知量をまとめると下表のようになる。これらは“変位が既知なら力が未知”、逆に“力が既知なら変位が未知”の関係になっている。変位が既知な場合の未知な節点力は支点反力等に対応する。いずれにしても、この種の問題では未知量が力または変位に統一されていないので、連立一次方程式の解き方にも工夫が必要になる。

	既知の条件		未知量	
	x	y	x	y
節点１	$u_1=0$	$v_1=0$	X_1	Y_1
節点２	$X_2=0$	$v_2=0$	u_2	Y_2
節点３	$X_3=0$	$Y_3=-P$	u_3	v_3

変位が既知なら {u} の中の幾つかの成分は未知数から除外すべきであるが、通常は変位成分の数や順序を変えないで方程式を解く方法を採る。例えば $v_2=\delta$（ある値）なる変位の境界条件を導入する場合を考えると、原式は

$$
\begin{array}{lcl}
k_{11}u_1+k_{12}v_1+k_{13}u_2+k_{14}v_2+k_{15}u_3+k_{16}v_3 & = & X_1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots+k_{24}v_2+\cdots\cdots & = & Y_1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots+k_{34}v_2+\cdots\cdots & = & X_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots+k_{44}v_2+\cdots\cdots & = & Y_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots+k_{54}v_2+\cdots\cdots & = & X_3 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots+k_{64}v_2+\cdots\cdots & = & Y_3
\end{array}
$$

$v_2=\delta$ を代入して右辺に移項することで未知数（変位）は１つ減るが、方程式の数は変わらない。これは v_2 が既知になった代わりに Y_2 が未知になったためであり、第４式は未知反力を求める式と

して残る。この式を削除すれば変位のみを未知数とする連立一次方程式になるが、変位成分の数と順序を元のままにしておくために、第４式にダミーの式として $v_2=\delta$ を挿入する。この結果

$$
\begin{aligned}
k_{11}u_1+k_{12}v_1+k_{13}u_2+0\cdot v_2+k_{15}u_3+k_{16}v_3 &= X_1-k_{14}\delta \\
\cdots\cdots\cdots\cdots+0\cdot v_2+\cdots\cdots\cdots &= Y_1-k_{24}\delta \\
\cdots\cdots\cdots\cdots+0\cdot v_2+\cdots\cdots\cdots &= X_2-k_{34}\delta \\
0\cdot u_1+0\cdot v_1+0\cdot u_2+1\cdot v_2+0\cdot u_3+0\cdot v_3 &= \delta \\
\cdots\cdots\cdots\cdots+0\cdot v_2+\cdots\cdots\cdots &= X_3-k_{54}\delta \\
\cdots\cdots\cdots\cdots+0\cdot v_2+\cdots\cdots\cdots &= Y_3-k_{64}\delta
\end{aligned}
$$

行列表示すると

$$
\begin{bmatrix}
k_{11} & k_{12} & k_{13} & 0 & k_{15} & k_{16} \\
k_{21} & k_{22} & k_{23} & 0 & k_{25} & k_{26} \\
k_{31} & k_{32} & k_{33} & 0 & k_{35} & k_{36} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
k_{51} & k_{52} & k_{53} & 0 & k_{55} & k_{56} \\
k_{61} & k_{62} & k_{63} & 0 & k_{65} & k_{66}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} X_1-k_{14}\delta \\ Y_1-k_{24}\delta \\ X_2-k_{34}\delta \\ \delta \\ X_3-k_{54}\delta \\ Y_3-k_{64}\delta \end{Bmatrix}
$$

となって｛u｝や［K］の成分の順序は変わらない。既知の変位成分ごとに上の修正を順次行えば、｛u｝の成分は全て未知数、｛F｝の成分は全て既知量になり、通常の形で連立一次方程式が解ける。図-4.9 の例題に上の方法で境界条件を導入した場合の最終的な方程式は以下の形になる。

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & k_{33} & 0 & k_{35} & k_{36} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & k_{53} & 0 & k_{55} & k_{56} \\
0 & 0 & k_{63} & 0 & k_{65} & k_{66}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P \end{Bmatrix}
\qquad (4.32)
$$

（５）部材応力の計算

節点変位 $\{u\}_e$ が求まれば、要素ごとに伸び量や部材力が求まる。

伸び量：$e = \{B\}\{u\}_e$ ← (4.27)

部材力：$s = (EA/L)\times e$ ← (4.28)

部材応力：$\sigma = s/A$ （A：部材断面積）

4.3　連続体の有限要素解析

（１）変位関数と形状関数

　連続体の有限要素解析でも、基本的には、トラス構造と同様の手順で解析が行われる。連続体を離散系モデルで表現する（要素分割する）とき、種々の形態の要素が考えられるが、ここでは最も簡単な三角形定ひずみ要素について説明する。図-4.10 のように連続体を有限個の三角形要素に分割し、個々の要素は三角形の頂点を節点として互いに連結され、力を及ぼし合っていると考える。代表的な要素 e を取り出し、関係する節点の番号を i，j，k と付けると、この要素に関する節点力および節点変位ベクトルは次のように表される。

$$\{F\}_e = \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ X_j \\ Y_j \\ X_k \\ Y_k \end{Bmatrix} \qquad \{u\}_e = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix} \qquad (4.33)$$

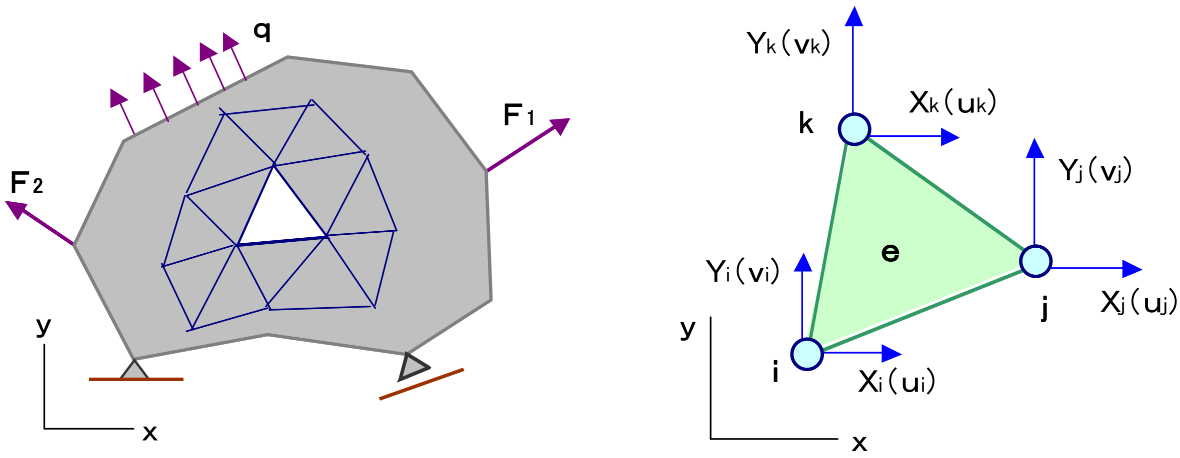
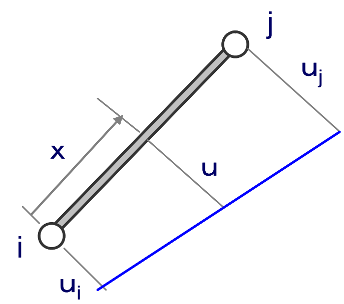


図-4.10　三角形要素



　トラスの場合は、暗黙の仮定として、要素内の変位は端部２節点の変位から直線的に内挿されるとしていたが、一般には、離散系モデルを導入する際に、要素内の任意点の変位と節点変位の間に関数関係を予め定めておく必要があり、これを「変位関数」と称する。三角形要素に対して適用される最も簡単な変位関数はｘ，ｙの一次式であり、この仮定によって要素内ではひずみが一定になるので、定ひずみ要素と呼ばれる。このとき、$\{\alpha\} = \{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_5,\ \alpha_6\}^T$ を未定常数として、要素内の変位ｕ，ｖは

$$u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$$
$$v(x, y) = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \qquad (4.34)$$

で表される。もちろん、上式以外にｘ，ｙの２次、３次など高次の成分を含む変位関数も考え得る。次数の高い関数を用いるほど要素内の変位は精度よく表現できるが、その代わり解析が煩雑になる。上式を行列表示するために、ｕ，ｖをまとめて｛δ｝と置くと

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \{\alpha\} = [A]\{\alpha\} \qquad (4.35)$$

上式のｘ，ｙに３つの節点の座標を代入すれば｛δ｝は各節点の変位を表す。対応する座標や変位の成分に節点番号　ｉ，ｊ，ｋ　を添字として付け、３つの節点の表示を１つにまとめると

$$\{u\}_e = \begin{Bmatrix} \{\delta_i\} \\ \{\delta_j\} \\ \{\delta_k\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} = [C]\{\alpha\} \qquad (4.36)$$

上式を｛α｝について解き、｛α｝＝［Ｃ］$^{-1}$｛ｕ｝$_e$ の形にしてから式(4.35)に代入すると、要素内の任意点の変位｛δ｝と節点変位｛ｕ｝$_e$ の関係が定まる。　［Ｃ］$^{-1}$ を求めると

$$[C]^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} a_i & 0 & a_j & 0 & a_k & 0 \\ b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ c_i & 0 & c_j & 0 & c_k & 0 \\ 0 & a_i & 0 & a_j & 0 & a_k \\ 0 & b_i & 0 & b_j & 0 & b_k \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} a_i &= x_j y_k - x_k y_j \\ b_i &= y_j - y_k \\ c_i &= x_k - x_j \end{aligned} \qquad (4.37)$$

Ａは三角形要素の面積であり、次式より定まる。

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} = (y_i c_i + y_j c_j + y_k c_k)/2 \qquad (4.38)$$

以上から、要素内変位｛δ｝と節点変位｛ｕ｝$_e$ の関係は次のように表される。

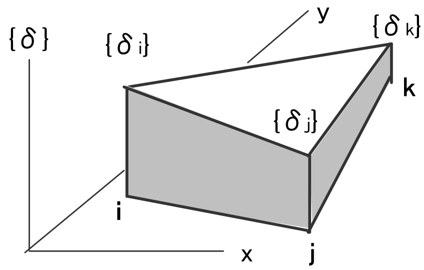
$$\{\delta\} = [A][C]^{-1}\{u\}_e = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} a_i + b_i x + c_i y & 0 & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ 0 & a_i + b_i x + c_i y & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \end{bmatrix} \{u\}_e = [N]\{u\}_e$$

(4.39)

上の行列［N］を「形状関数(shape function)」、または要素内部の変位を、節点変位を用いて補間する意味から「補間関数あるいは内挿関数」と呼ばれる。

※形状関数：

三角形の平面要素（ijk）で変位関数をx，yの一次式と仮定すると（定ひずみ要素）、要素内の任意点の変位は、３つの節点の変位｛δ｝を端点とする（屋根状の）平面の高さで与えられる。これが形状関数（内挿関数とか補間関数とも呼ぶ）［N］の意味である。



（２）要素の剛性方程式

さて、要素の剛性方程式：$\{F\}_e = [K]_e\{u\}_e$ の誘導に際しては、バネ系やトラス構造の解析と同様に、以下の３つの基本条件式が使われる。

①つり合い式：$\{F\}_e = [B]^T\{\sigma\}$　　$\{F\}_e$ ＝外力（節点力)、$\{\sigma\}$ ＝内力（応力）

②適合条件式：$\{\varepsilon\} = [B]\{u\}_e$　　$\{u\}_e$ ＝系の全体的な変形（節点変位）
$\{\varepsilon\}$ ＝局部的な変形（ひずみ）

③構成式：$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$　　［D］＝応力とひずみの関係（弾性率，ポアソン比）

②適合条件式：

連続体の適合条件式は、物体内の１点のひずみ｛ε｝と変位｛u，v｝の関係式であり

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&1&0&1&0\end{bmatrix}\{\alpha\}=[H]\{\alpha\} \qquad (4.40)$$

上式に $\{\alpha\} = [C]^{-1}\{u\}_e$ を用いると、離散系に関する適合条件式が下式で表される。

$$\{\varepsilon\} = [H][C]^{-1}\{u\}_e = [B]\{u\}_e \qquad (4.41)$$

$$[B]=\frac{1}{2A}\begin{bmatrix}b_i&0&b_j&0&b_k&0\\0&c_i&0&c_j&0&c_k\\c_i&b_i&c_j&b_j&c_k&b_k\end{bmatrix}$$

③構成式：

連続体の構成式は、応力～ひずみ関係を記述するフック則であり、二次元の平面応力問題では

$$\{\sigma\}=\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1-2\nu/2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=[D]\,\{\varepsilon\} \qquad (4.42)$$

上式で　E　→　E/(1－ν²)，　ν　→　ν/(1－ν）と置き換えると平面ひずみ問題の［D］を得る。

①つり合い式（＝ 仮想仕事の原理）：

　トラスを含めたバネ構造系と異なり、連続体の場合は、剛性方程式の誘導に「仮想仕事の原理」が適用される。すなわち、つり合い式を満たす内力＝応力{σ}と外力＝節点力{F}、および適合条件式を満たす内的な変形＝ひずみ{ε}と外的な変形＝節点変位{u}の間に、形式的に以下の内積の関係が成立する。

$$\{\sigma\}^T\{\varepsilon\} = \{F\}^T\{u\} \qquad (4.43)$$

左辺は内力仕事w_i、右辺は外力仕事w_oと見なせるから、上式は適合条件式を満たす変形とつり合い条件を満たす力に対して、仮想仕事の原理：$w_i = w_o$が成り立つことを示している。換言すれば、適合条件式の仮定の下で、仮想仕事の原理は物体に働く力がつり合うための必要条件であり、つり合い条件式と同等に扱われるべき性質のものである。

　二次元の応力～変形問題では（図-4.11）

$$\text{表面荷重：}\{p\}=\begin{Bmatrix}p_x\\ p_y\end{Bmatrix}\quad \text{物体力：}\{b\}=\begin{Bmatrix}b_x\\ b_y\end{Bmatrix} \qquad (4.44)$$

の作用の下で、物体の内部には応力｛σ｝が発生し、これに伴ってひずみ｛ε｝が生じる。　｛σ｝を“内力”、｛p｝や｛b｝を“外力”と表現すれば、外力の作用の下で内力が発生し、それらは互いにつり合っている。

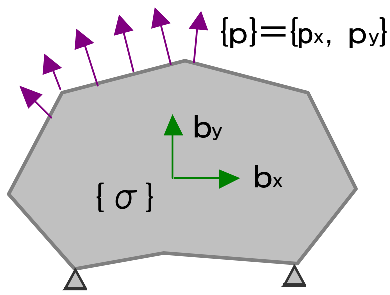


図-4.11　内力と外力

　「仮想仕事の原理」を改めて述べると、“物体内に働く力がつり合い状態にあれば、物体の仮想的微小変位に対してそれらのなす仕事の総和はゼロである”と表現される。つり合い状態にある物体内において、微小な変位｛dδ｝＝$\{du, dv\}^T$と、これに伴う微小ひずみ｛dε｝＝$\{d\varepsilon_x, d\varepsilon_y, d\gamma_{xy}\}^T$が生じたとすると、外力および内力のなす仕事は

$$\begin{aligned}\text{外力仕事：}w_o &= \int (p_x du + p_y dv)\, dA + \int (b_x du + b_y dv)\, dV\\ \text{内力仕事：}w_i &= \int (\sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \tau_{xy} d\gamma_{xy})\, dV\end{aligned} \qquad (4.45)$$

で表される。ただし、∫dA　は面積積分、∫dV　は体積積分である。したがって、仮想仕事の原理は、行列表示して次式を得る。

$$\int \{d\varepsilon\}^T\{\sigma\}\, dV = \int \{d\delta\}^T\{p\}\, dA + \int \{d\delta\}^T\{b\}\, dV \qquad (4.46)$$

　以下、剛性方程式の誘導手順を述べる。上式の微小変位｛dδ｝及び微小ひずみ｛dε｝は、対応する微小節点変位を　$\{du\}_e$と置いたとき、式(4.37)の　$\{d\alpha\}=[C]^{-1}\{du\}_e$より

式(4.39)：{dδ} ＝［A］{dα}＝［A］［C］$^{-1}${du}$_e$ ＝［N］{du}$_e$

式(4.41)：{dε} ＝［H］{dα}＝［H］［C］$^{-1}${du}$_e$ ＝［B］{du}$_e$

となる。したがって、これらを式(4.46)に代入すると

$$\int\{du\}_e^T[B]^T\{\sigma\}\,dV=\int\{du\}_e^T[N]^T\{p\}\,dA+\int\{du\}_e^T[N]^T\{b\}\,dV$$

左辺は式(4.42)の構成式：{σ} ＝[D]{ε}＝[D][B]{u}$_e$ を用いて、更に

$$\int\{du\}_e^T[B]^T[D][B]\{u\}_e\,dV$$

と表される。 ここで、節点変位{u}$_e$（および {du}$_e$）は座標ｘ，ｙに無関係であるから積分の外に出すことができ、また上式は任意の仮想微小変位について成り立たねばならないから、{du}$_e$は両辺から消去することができる。この結果、最終的に下の表現を得る。

$$[K]_e\{u\}_e=\{F\}_e \qquad (4.47)$$

$$[K]_e=\int[B]^T[D][B]\,dV,\quad \{F\}_e=\int[N]^T\{p\}\,dA+\int[N]^T\{b\}\,dV\quad(=\{F_p\}_e+\{F_b\}_e)$$

この［K］$_e$ および{F}$_e$ が要素の剛性行列および節点力ベクトルであり、{F}$_e$ は更に表面荷重による項 {F$_p$}$_e$ と物体力による項 {F$_b$}$_e$ に分けられる。定ひずみ要素を仮定すると、剛性行列［K］$_e$ の積分項［B］^{T}[D][B]は要素内で一定値であり、変数ｘ，ｙを含まないから、要素の体積、面積、厚さを各々 V，A，ｔ と置くと［K］$_e$ は次式で与えられる。

$$[K]_e=[B]^T[D][B]\cdot V=[B]^T[D][B]\cdot At \qquad (4.48)$$

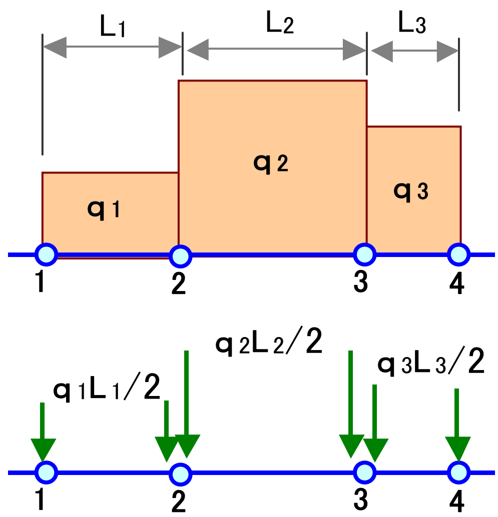
全系の方程式はトラスの構造解析と同様な方法で要素の方程式を加え合わせて得られる。全節点数をN$_p$とすると［K］は 2N$_p$×2N$_p$ の対称行列になる。

（３）荷重項

表面分布荷重 {p} ＝{p$_x$, p$_y$}^{T} による節点力ベクトルは式(4.47)より、次式で与えられる。

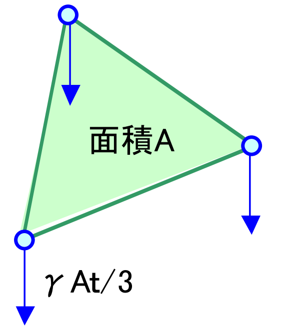
$$\begin{aligned}\{F_p\}_e&=\int[N]^T\{p\}\,dA\\&=([C]^{-1})^T\int[A]^T\{p\}\,dA\end{aligned} \qquad (4.49)$$

∫dA は面積積分であるが、二次元問題では物体表面に沿う線積分になる。しかし、実際には積分を行わず、単純ばりの計算によって分布荷重を境界節点に働く等価な集中荷重に置き換えて表面荷重の効果を取り入れることができる（図-4.12）。すなわち、各境界節点が関係する範囲の荷重を集中荷重に置換えて分割配分する。



図－4.12　表面荷重の処理

物体力 $\{b\}=\{b_x, b_y\}^T$ による節点力ベクトルも同形で表される。(体積積分 ∫dV である点が異なる)



図－4. 13　自重の処理

$$\{F_b\}_e = \int [N]^T \{b\}\, dV = ([C]^{-1})^T \int [A]^T \{b\}\, dV$$

b_x, b_y を要素内で一定値とし、座標原点を要素の重心にとって積分を実行すると、式(4. 50)の形で荷重項が定まる。構造物の自重による応力・変形問題では、$b_x=0$, $b_y=-\gamma$ であるから、要素の重量（$\gamma A t$）を３等分したものがｙ方向の節点荷重として３つの節点に分配されると考えればよい。

$$\{F_b\}_e = ([C]^{-1})^T \iint t \begin{Bmatrix} b_x \\ b_x x \\ b_x y \\ b_y \\ b_y x \\ b_y y \end{Bmatrix} dxdy = ([C]^{-1})^T \begin{Bmatrix} b_x At \\ 0 \\ 0 \\ b_y At \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{At}{3} \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_x \\ b_y \\ b_x \\ b_y \end{Bmatrix} \qquad (4.50)$$

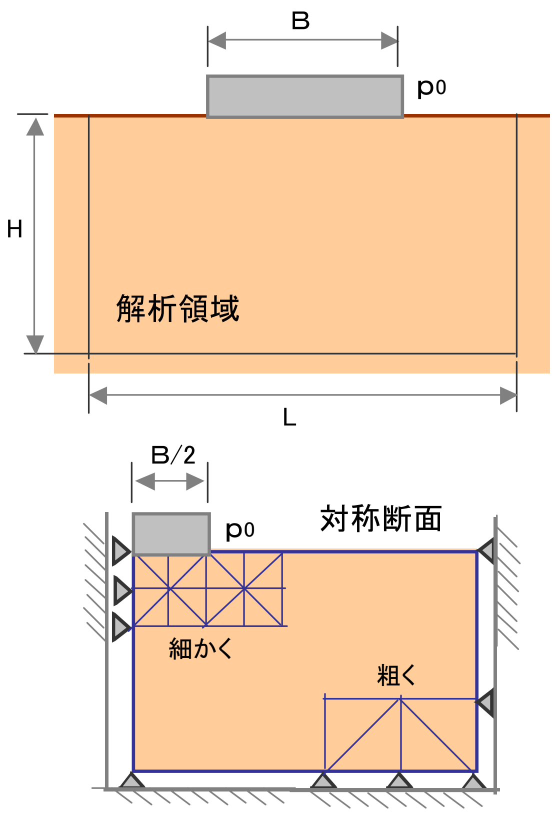
（４）要素内応力・ひずみの計算

方程式の解として節点変位 $\{u\}_e$ を得た後は、式(4. 41)より要素内のひずみ $\{\varepsilon\}$、式(4. 42) より要素内の応力 $\{\sigma\}$ が定まる。

$$\{\varepsilon\} = [H][C]^{-1}\{u\}_e = [B]\{u\}_e$$

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} = [D][B]\{u\}_e \qquad (4.51)$$

変位関数にｘ，ｙの一次式を仮定すると、応力・ひずみは要素内で一定値をとる。



（５）計算の実行：解析上の留意点

①解析領域幅・深さ（L，H）の設定

②解析領域及び載荷状態が対称な場合
　(対称軸の設定／支持条件)

③荷重点近傍の要素分割

図−4. 14　計算上の注意

参考文献：「有限要素法による数値解析入門」，
地盤工学会「土と基礎」講座，1987.