

第2章 基礎方程式と弾性問題の解

2.1 フックの法則

- 応力に対してひずみが生じ、応力をゼロに戻すとひずみも消失する性質を「弾性」という。弾性挙動を示す棒の軸方向の応力 σ とひずみ ε の間には式(a)の関係が成り立つ。これが「フックの法則」であり、Eをヤング率または弾性率と呼ぶ。棒を軸(縦)方向に引張ると直交(横)方向に収縮し、逆に縦方向に圧縮すると横方向に膨張する。棒の縦横の長さを L, d とし、縦ひずみを $\varepsilon_L = (L - L_0)/L_0$ 、横ひずみを $\varepsilon_d = (d - d_0)/d_0$ で表すと (L_0, d_0 は初期長さ)、材料の変形特性を表すもう1つの弾性定数としてポアソン比 ν が式(b)で定義される。一方、せん断応力 τ とせん断ひずみ 2γ (γ : テンソルひずみ) の間にも式(a)と同形式の式(c)が成立し、Gをせん断弾性率または剛性率と呼ぶ。等方弾性体では E, ν , G の間に式(d)の関係がある。

$$(a) \sigma = E\varepsilon \quad (b) \nu = -\frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_L} \quad (c) \tau = 2G\gamma \quad (d) G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

- 等方・均質弾性体の主応力 ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) と主ひずみ ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$) の間には

$$\varepsilon_i = \frac{1}{E} \left\{ \sigma_i - \nu(\sigma_j + \sigma_k) \right\} \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (2.1)$$

なる応力～ひずみ関係が成り立つ。これを「一般化したフックの法則」という。棒の単軸引張では $\sigma_1 = \sigma_0$ (軸応力)、 $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ より $\varepsilon_1 = \sigma_0/E$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\nu \sigma_0/E$ となり、式(a)(b)に帰着する。式(2.1)を応力成分について解くと次の表示を得る。

$$\sigma_i = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} e + \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_i = \lambda e + 2\mu \varepsilon_i \quad (i=1, 2, 3) \quad (2.2)$$

$e = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ は体積ひずみである。 $\lambda, \mu (=G)$ は「ラーメの常数」と呼ばれる。

- 式(2.1)で $1 \rightarrow x, 2 \rightarrow y, 3 \rightarrow z$ とすると、 $x y z$ 直角座標における垂直応力 ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$) と垂直ひずみ ($\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$) の関係が得られる。つまり式(2.1)は任意方向の垂直応力・ひずみの間で成り立っている。例えば、 x 軸の(1, 2, 3)方向への方向余弦を (l_1, m_1, n_1) とすると、応力の座標変換式：式(1.10)より

$$\begin{aligned} \sigma_x &= l_1^2 \sigma_1 + m_1^2 \sigma_2 + n_1^2 \sigma_3 \\ &= l_1^2 (\lambda e + 2\mu \varepsilon_1) + m_1^2 (\lambda e + 2\mu \varepsilon_2) + n_1^2 (\lambda e + 2\mu \varepsilon_3) \\ &= \lambda e (l_1^2 + m_1^2 + n_1^2) + 2\mu (l_1^2 \varepsilon_1 + m_1^2 \varepsilon_2 + n_1^2 \varepsilon_3) \\ &= \lambda e + 2\mu \varepsilon_x \end{aligned}$$

となって式(2.2)が成立する。ただし、第3式の第1項の $() = 1$ (方向余弦の性質)、第2項の $() = \varepsilon_x$ (応力と同形のひずみの座標変換式より) を用いている。一方、 y 軸の方向余弦を (l_2, m_2, n_2) とすると、同様の演算から

$$\begin{aligned}
\tau_{xy} &= l_1 l_2 \sigma_1 + m_1 m_2 \sigma_2 + n_1 n_2 \sigma_3 \\
&= l_1 l_2 (\lambda e + 2\mu \varepsilon_1) + m_1 m_2 (\lambda e + 2\mu \varepsilon_2) + n_1 n_2 (\lambda e + 2\mu \varepsilon_3) \\
&= \lambda e (l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2) + 2\mu (l_1 l_2 \varepsilon_1 + m_1 m_2 \varepsilon_2 + n_1 n_2 \varepsilon_3) \\
&= 2\mu \gamma_{xy} \\
&= 2G \gamma_{xy}
\end{aligned}$$

を得る。すなわち、垂直応力～ひずみ関係：式(2.2) から座標変換式を介してせん断応力～ひずみ関係が導かれたことになる。

●以上まとめると、x y z 直角座標の応力・ひずみ成分間の関係は ($\mu = G$)

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \lambda e + 2\mu \varepsilon_x & \tau_{yz} &= 2\mu \gamma_{yz} \\
\sigma_y &= \lambda e + 2\mu \varepsilon_y & \tau_{zx} &= 2\mu \gamma_{zx} \\
\sigma_z &= \lambda e + 2\mu \varepsilon_z & \tau_{xy} &= 2\mu \gamma_{xy}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

※柱状弾性体の側面を拘束し、側方にひずみを生じさせない状態で一様な軸応力を加えるときの軸方向応力とひずみの関係を求める。軸方向応力・ひずみを σ_1, ε_1 とすると、側方拘束状態： $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ では式(2.1)より

$$\begin{aligned}
\varepsilon_2 = 0 &\rightarrow \sigma_2 = \nu (\sigma_3 + \sigma_1) \\
\varepsilon_3 = 0 &\rightarrow \sigma_3 = \nu (\sigma_1 + \sigma_2)
\end{aligned}$$

両式より主応力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ の関係として次式を得る。

$$\sigma_2 = \sigma_3 = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_1 \quad (= K_0 \sigma_1) \tag{2.4}$$

K_0 は土質力学では静止土圧係数に相当する。上式の σ_2, σ_3 を ε_1 の式に代入すると

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} \left(\sigma_1 - \nu \times 2 \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_1 \right) = \frac{1-\nu-2\nu^2}{1-\nu} \frac{\sigma_1}{E} = \frac{\sigma_1}{E_c}$$

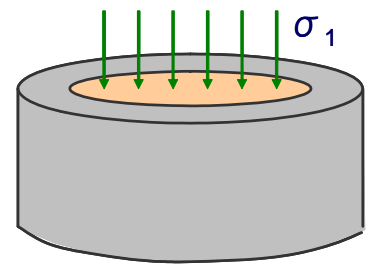
となり、「側方拘束弾性率」 E_c が定義される。

※式(2.1)の3つの式を辺々加え、平均垂直応力を $\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$ と置くと

$$\text{体積ひずみ} : e = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{3(1-2\nu)}{E} \sigma_m = \frac{\sigma_m}{K}$$

よって、 $\sigma_m \sim e$ 関係を結ぶ「体積弾性率」 K が定義される。

※垂直応力 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ から平均垂直応力 σ_m を引き、 τ_{yz} などをそのままにした応力を偏差応力という。同様に、 γ_{yz} などを変えずに垂直ひずみ $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ から $e/3$ を引いたものを偏差ひずみという。偏差応力・ひずみに記号' を付けると



$$\begin{aligned}\sigma_x' &= \lambda e + 2G\varepsilon_x - Ke = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot e + \frac{E}{(1+\nu)} \cdot \varepsilon_x - \frac{E}{3(1-2\nu)} \cdot e \\ &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ \nu e + (1-2\nu)\varepsilon_x - \frac{1+\nu}{3} \cdot e \right\} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ (1-2\nu)\varepsilon_x - \frac{e}{3}(1-2\nu) \right\} \\ &= \frac{E}{(1+\nu)} \left\{ \varepsilon_x - \frac{e}{3} \right\} = 2G\varepsilon_x'\end{aligned}$$

となる。せん断応力～ひずみ関係は $\tau_{yz} = 2G \gamma_{yz}$ 等で表せるから、偏差応力・ひずみを用いると全ての応力～ひずみ成分の関係が $2G$ で結ばれることが分かる。

2.2 弾性論における基礎方程式

- 変位の基礎方程式：等方弾性体の応力～ひずみ関係：式(2.3)に、第1章で定義したひずみ～変位関係：式(1.21)を用いると、応力と変位の関係式が次のように表せる。

$$\sigma_x = 2G \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right) \quad \text{など} \quad \tau_{yz} = G \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad \text{など} \quad (2.5)$$

このように表した σ_x , τ_{xy} 及び τ_{xz} を、それぞれ x , y 及び z で微分すると

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 2G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\nu}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial e}{\partial x} \right) \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right)$$

上3式を辺々加算して整理すると、 x 方向の力のつりあい式として

$$\begin{aligned}G\nabla^2 u + G \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2G \frac{\nu}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial e}{\partial x} + X &= 0 \\ G\nabla^2 u + G \frac{\partial e}{\partial x} \left\{ 1 + \frac{2\nu}{1-2\nu} \right\} + X &= 0 \quad (2.6)\end{aligned}$$

を得る。 $x \rightarrow y, z$ として、 y, z 方向の力のつりあい式も同様に表せる。これを「変位の基礎方程式」という。ただし、 e 及び ∇^2 は次式で定義される。

$$\text{体積ひずみ} : e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad \text{ナブラ自乗} : \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

物体力が場所によらず一定（例えば、 $X=Y=0, Z=-\rho g$ ）の場合、式(2.6)を微分して

$$x : \nabla^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} = 0 \quad (x \text{ で微分})$$

同様に y, z 方向についても、つりあい式を y, z で順次微分して

$$y : \nabla^2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial^2 e}{\partial y^2} = 0 \quad z : \nabla^2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial^2 e}{\partial z^2} = 0$$

以上の3式を加算すると、最終的に次式を得る。

$$\nabla^2 e + \frac{1}{1-2\nu} \nabla^2 e = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla^2 e = 0 \quad (2.7)$$

また、式(2.6)に ∇^2 を作用させると、例えばx方向は

$$\nabla^2 \nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu} \nabla^2 \left(\frac{\partial e}{\partial x} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla^4 u = 0$$

y, z方向についても同様であり、結局次式を得る。

$$\nabla^4 u = 0 \quad \nabla^4 v = 0 \quad \nabla^4 w = 0 \quad (2.8)$$

すなわち、eは調和関数、u, v, wは重調和関数でなければならない。

●弾性問題における未知数と関係式を整理すると以下のようになる。

未知数 (15 個) :

変位 (u, v, w)

ひずみ ($\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$)

応力 ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$)

関係式 (15 式) :

①ひずみ～変位 (6 式)

②応力～ひずみ (6 式)

③応力のつり合い式 (3 式)

誘導 : ①+② → 式(2.5) (ひずみの6成分消去)

式(2.5)+③ → 基礎方程式 : 式(2.6) or 式(2.8) (応力の6成分消去)

→ 基礎方程式 (3 式) + 境界条件

→ 解 (u, v, w)

※二次元の調和関数と重調和関数の例

*調和関数 (直角座標 x y) :

$x, y, x^2 - y^2, xy, x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3, x^4 - 6x^2y^2 + y^4, x^3y - xy^3$
 $\sin(mx) \cdot \cosh(mx), e^{nx} \cos(nx)$

*調和関数 (極座標 r θ) :

$\theta, \log r, r^n \sin(n\theta), r^n \cos(n\theta), r^{-n} \sin(n\theta), r^{-n} \cos(n\theta)$

*重調和関数 (Vを調和関数として)

・直角座標 : $xV, yV, (x^2 + y^2)V$

・極座標 : $Vr \cos \theta, Vr \sin \theta, r^2V$

●応力の基礎方程式 : 変位が発生して応力が生じるから、物体内に生じる応力は、応力のつり合い方程式と同時に、適合条件式を満たす必要がある。誘導は省略して(後述の2次元問題で誘導を示す)結論のみ示すと、適合条件式を応力成分で表示し、つり合い条件式と組み合わせることにより、x方向の基礎方程式が以下のように得られる。($\Omega = 3\sigma_m = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ と置く)

$$(1+\nu)\left[\nabla^2\Omega-\nabla^2\sigma_x-\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2}\right]-\nu\left[\nabla^2\Omega-\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2}\right]=(1+\nu)\left[\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}-\frac{\partial Z}{\partial z}\right]$$

物体力 X, Y, Z が場所によらず一定（右辺がゼロ）なら、上式は

$$(1+\nu)\nabla^2\sigma_x-\nabla^2\Omega+\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2}=0 \quad (2.9)$$

同様な式が σ_y, σ_z についても書けるから、3式を加えると、結局

$$\nabla^2\Omega=\nabla^2(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)=0 \quad (2.10)$$

を得る。すなわち、平均垂直応力 $\sigma_m=\Omega/3$ は調和関数である。このとき式(2.9)の上の式に ∇^2 を作用させると $\nabla^4\sigma_x=0$ を得る。同様な式が他に5つ書けるから、まとめると

$$\nabla^4(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy})=0 \quad (2.11)$$

したがって、直角座標における応力成分は重調和関数でなければならない。

- 軸対称問題における変位の基礎方程式: 軸対称問題では z 軸を対称軸とする円筒座標 (r, θ, z) が用いられ、座標軸に対応する変位 (u_r, u_θ, w) には

$$u_\theta=0, \quad u_r=u_r(r, z), \quad w=w(r, z)$$

なる条件が課せられる。したがって、 θ に関するせん断ひずみ: $\gamma_{\theta z}=\gamma_{r\theta}=0$ であり、式(1.47)で求めた4つのひずみ成分 ($\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \gamma_{rz}$) が残る。対応して、応力成分に関しては $\tau_{\theta z}=\tau_{r\theta}=0$ であり、($\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}$) の4成分が残る。軸対称問題における応力～ひずみ関係は、x y z 座標の応力～ひずみ関係と形式的に同じであり、 $x \rightarrow r, y \rightarrow \theta, z \rightarrow z$ として

$$\varepsilon_i=\frac{1}{E}\{\sigma_i-\nu(\sigma_j+\sigma_k)\} \quad (i, j, k=r, \theta, z) \quad 2\gamma_{rz}=\frac{\tau_{rz}}{G} \quad (2.12)$$

の4式となる。逆に解くと、垂直成分については式(2.2)と同形の関係式を得る。ここで、軸対

称問題での体積ひずみは $e=\varepsilon_r+\varepsilon_\theta+\varepsilon_z=\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_r}{r}+\frac{\partial w}{\partial z}$ である。

前節と同様に、ひずみ～変位関係を応力～ひずみ関係に代入して応力成分を変位で表し、これらを応力のつり合い方程式に代入すると、変位の基礎方程式を得る。ただし、軸対称問題では $\Theta=0, \tau_{\theta z}=\tau_{r\theta}=0, \sigma_\theta$ は θ に無関係であるから $\partial\sigma_\theta/\partial\theta=0$ となり、 θ 方向のつり合いは自動的に満たされている。 r, z 方向は次のようになる。

$$r: G\left[\nabla^2u_r+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial e}{\partial r}-\frac{u_r}{r^2}\right]+R=0 \quad z: G\left[\nabla^2w+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial e}{\partial z}\right]+Z=0 \quad (2.13)$$

円筒座標の ∇^2 は下式であるが、軸対称問題では u_r, w に θ を含まないので、第3項は消滅する。

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\partial}{r\partial r}+\frac{\partial^2}{r^2\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

2.3 2次元問題における基礎方程式

- 平面応力：薄い板の面内変形問題のように、面と垂直な方向(z)に外力(境界応力、物体力)が作用しない場合は、z方向に関する応力成分をゼロと仮定してよい。

$$\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (2.14)$$

この仮定によって問題はx-y面内での2次元応力・変形問題に帰着する。上式を前節の応力～ひずみ関係に代入すると、 $\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$ が得られ、ゆがみのない板のx-y面内での変形を対象としていることが分かる。残りの応力～ひずみ関係は

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= (\sigma_x - \nu \sigma_y) / E & 2\gamma_{xy} &= \tau_{xy} / G \\ \varepsilon_y &= (\sigma_y - \nu \sigma_x) / E \end{aligned} \quad (2.15)$$

と板厚方向のひずみ ε_z に関する $\varepsilon_z = -\nu(\sigma_x + \sigma_y) / E$ である。これらを逆に、応力をひずみで表して整理すると

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \quad \tau_{xy} = 2G\gamma_{xy} \quad (2.16)$$

のようになる。式(2.15)や式(2.16)が平面応力状態での直角座標応力成分($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$)とひずみ成分($\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$)の関係を与え、行列表示では次のように表される。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

- 平面ひずみ：延長の長い構造物の断面内での応力・変形問題のように、長手方向(z)に拘束され、zに無関係な外力が作用する場合は、z方向に関するひずみ成分をゼロと仮定してよい。すなわち、z方向に拘束されていることより $w=0$ 、またu, vはx, yのみの関数になるから、次が仮定できる。

$$\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \quad (2.18)$$

応力～ひずみ関係より $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ で、残りの応力($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$)とひずみ($\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$)成分の関係は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_x - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_y \right) & 2\gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \varepsilon_y &= \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_y - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_x \right) \end{aligned} \quad (2.19)$$

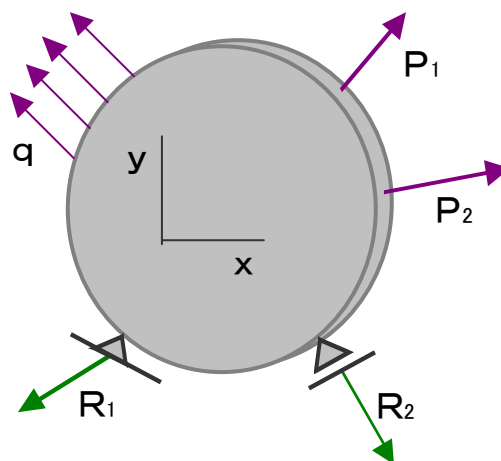


図-2.2 平面応力

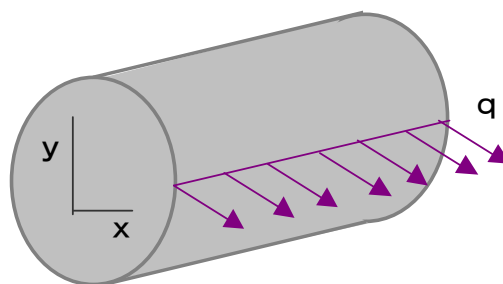


図-2.3 平面ひずみ

長手方向の変形を拘束する応力 σ_z は、 $\varepsilon_z=0$ より次式で表される。

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

$\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ であるから、 σ_z は3次元応力状態の1つの主応力である。式(2.19)の応力～ひずみ関係は、行列表示では以下のように表される。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

●式(2.15)と式(2.19)を比べると、平面応力の諸式で E , ν を

$$E \rightarrow E' = \frac{E}{1-\nu^2} \quad \nu \rightarrow \nu' = \frac{\nu}{1-\nu} \quad (2.21)$$

と置き換えれば平面ひずみ問題に帰着する。すなわち、平面応力問題として解いた解の(E , ν)を(E' , ν')と書き換えれば平面ひずみ問題の解が得られる。

●平面問題における基本的な諸式は、応力～ひずみ関係式(平面応力・ひずみ)と

$$\textcircled{1} \text{ひずみ～変位関係: } \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad 2\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\textcircled{2} \text{ひずみの適合条件: } \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (2.22)$$

$$\textcircled{3} \text{応力のつり合い式: } \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

であり、これらを組み合わせて変位あるいは応力の基礎方程式が導かれる。

●応力の基礎方程式: 上式②の適合条件式のひずみ成分を、式(2.15)を用いて応力成分で書き直し、応力のつり合い式③を用いて τ_{xy} を σ_x , σ_y で表して整理すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x - \nu\sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y - \nu\sigma_x) &= \frac{E}{G} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \\ &= (1+\nu) \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + (1+\nu) \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y \partial x} \\ &= -(1+\nu) \left[\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} \right] - (1+\nu) \left[\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right] \\ \rightarrow \nabla_1^2(\sigma_x + \sigma_y) &= -(1+\nu) \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \quad \text{ただし、} \nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (2.23)$$

を得る。X=0, Y=-ρg (重力) なら

$$\nabla_1^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (2.24)$$

となり、垂直応力の和は調和関数である。上式は三次元の式(2.10)で $\sigma_z=0$ (平面応力) または $\sigma_z=\nu(\sigma_x + \sigma_y)$ (平面ひずみ) としても得られる。このときの応力の基礎方程式は式(2.11)と同様に次式で与えられる。

$$\nabla_1^4(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 0 \quad (2.25)$$

上式の微分方程式を解くに当たり、境界条件の設定が必要になる。右図のように、法線方向余弦が (1, m) の境界面素に単位面積当たり (f_x, f_y) の表面外力が作用する場合、境界条件式は次式で表される。

$$\begin{aligned} 1 \cdot \sigma_x + m \cdot \tau_{xy} &= f_x \\ 1 \cdot \tau_{xy} + m \cdot \sigma_y &= f_y \end{aligned} \quad (2.26)$$

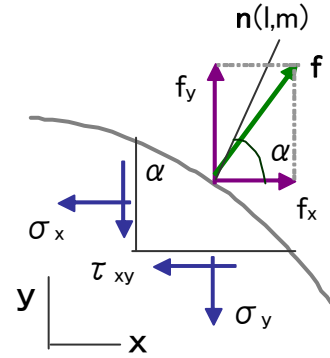


図-2.4 応力の境界条件

- 変位の基礎方程式：式(2.15)の応力～ひずみ関係と、式(2.22)の①ひずみ～変位関係を用いて、③の応力のつり合い式を変位 u, v で表すと、変位の基礎方程式として次式を得る。

$$\begin{aligned} x: \quad \frac{E}{2(1-\nu)} \frac{\partial e_1}{\partial x} + G \nabla_1^2 u + X &= 0 \quad \text{ただし、} e_1 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \\ y: \quad \frac{E}{2(1-\nu)} \frac{\partial e_1}{\partial y} + G \nabla_1^2 v + Y &= 0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

上式を x, y で順次微分して加えると、X=0, Y=-ρg の場合、式(2.7)及び式(2.8)と同様な関係として

$$\nabla_1^2 e_1 = 0 \rightarrow \nabla_1^4 u = 0 \quad \nabla_1^4 v = 0 \quad (2.28)$$

を得る。これを境界条件に合うように解けばよいが、境界で応力 (f_x, f_y) が与えられる場合は、式(2.26)の応力成分を変位で表したものをを用いる。すなわち、式(2.16)と式(2.22)の①から

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \text{ などとして式(2.26)に代入し、変位の境界条件に直して適用する。}$$

- 極座標における関係式：極座標においては次の関係式が成り立つ。

$$\text{①ひずみ～変位関係：} \quad \varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad \varepsilon_\theta = \frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta} + \frac{u_r}{r} \quad 2\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u_r}{r \partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}$$

$$\text{②ひずみの適合条件：} \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \theta^2} + \frac{r \partial (\varepsilon_r - 2\varepsilon_\theta)}{\partial r} - r^2 \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial r^2} = 2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\gamma_{r\theta} + r \frac{\partial \gamma_{r\theta}}{\partial r} \right)$$

$$\text{③応力のつり合い式：} \quad \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{r \partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R = 0 \quad \frac{\partial \sigma_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + \Theta = 0$$

$$\textcircled{4} \text{応力} \sim \text{ひずみ関係} : \varepsilon_r = \frac{\sigma_r - \nu\sigma_\theta}{E} \quad \varepsilon_\theta = \frac{\sigma_\theta - \nu\sigma_r}{E} \quad 2\gamma_{r\theta} = \frac{\tau_{r\theta}}{G}$$

式(2.23)～式(2.25)のような関係は前と同様の手順で導くことができるが、垂直応力の和は座標変換によらない、すなわち $\sigma_x + \sigma_y = \sigma_r + \sigma_\theta$ の性質を使うと、式(2.24)の応力の基礎方程式に対応する式が次式で与えられる。

$$\nabla_1^2(\sigma_r + \sigma_\theta) = 0 \quad \text{ただし、} \nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r\partial r} + \frac{\partial^2}{r^2\partial\theta^2} \quad (2.29)$$

極座標における変位の基礎方程式を導く場合は、変位 (u_r, u_θ) を未知数とする代わりに、二次元の体積ひずみ $e_1 = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta$ と z 軸回りの回転 2ω を未知数とした方が便利である。すなわち、両者は次式で定義される。

$$e_1 = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_\theta}{r\partial\theta} \quad 2\omega = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_r}{r\partial\theta} \quad (2.30)$$

$$\text{※ } x \text{ } y \text{ 座標では } e_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad 2\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

※ $x \text{ } y$ 座標の剛体変位 ($u_r = a + by, v_r = c - bx$) を上式に代入すると、 $e_1 = 0, \omega = -b$ (b : 回転に対応する剛体変位) になる。

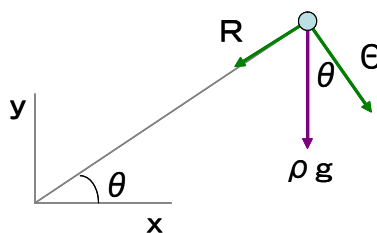
これによって変位の基礎方程式は

$$\begin{aligned} \frac{Er}{1-\nu^2} \nabla_1^2 e_1 + \frac{\partial(rR)}{\partial r} + \frac{\partial\Theta}{\partial\theta} &= 0 \\ \frac{Er}{1-\nu^2} \nabla_1^2 \omega + \frac{\partial(r\Theta)}{\partial r} - \frac{\partial R}{\partial\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

と書けるが、重力場*では $R = -\rho g \sin\theta, \Theta = -\rho g \cos\theta$ であるので、上式は簡略化されて次式のように表示される。

$$\nabla_1^2 e_1 = 0 \quad \nabla_1^2 \omega = 0 \quad (2.32)$$

*重力場



2.4 弾性問題（平面応力）の厳密解

●物体内に生じる応力は、物体内の各点で応力のつり合い式と適合条件を満足し、表面では境界条件を満足していなければならない。このような応力が求まれば、これから得られる変位は変位の方程式を満足する。また変位の方程式を満足する変位が求まれば、これから得られる応力は応力のつり合い式と適合条件を満足する。応力のつり合い式、適合条件及び変位の方程式を**弾性基礎方程式**という。また、弾性体内部で応力のつり合い式と適合条件あるいは変位の方程式を満足し、表面では境界条件を満足する解を弾性問題の**厳密解**という。このような解は存在し、与えられた境界条件に対しては一つしか存在しないこと（解の唯一性）が証明されている。

●**サンブナン（Saint-Venant）の原理**： 弾性体の一部分に作用している荷重を、これと同等な荷重、すなわち静力学的に等しい合力と合モーメントに置き換えれば、両形式の荷重によって弾性体に生じる応力状態は、荷重点近傍では異なるけれども、荷重点から十分に遠く離れた領域では一致する。これをサンブナンの原理という。

例えば、図-2.5(a)のように端面に等分布荷重 p を受ける場合と、断面の図心を通る軸線に沿って集中荷重 $P = pA$ を受ける場合では、両端近傍の応力状態は全く異なるけれども、端面から3倍以上離れた領域では両応力状態はほとんど同じになる。図-2.5(b)のように、両端に一次的に分布する外力を受取る場合と端面の角に逆向きの集中力 P を受ける場合に、両外力のモーメント M が等しければ、すなわち $P = bh p_0/6$ ならば、両端近傍を除いて両応力状態は同じになる。

＜一次分布の外力 p_0 とモーメント M の関係を作り、 $P = bh p_0/6$ を導け＞

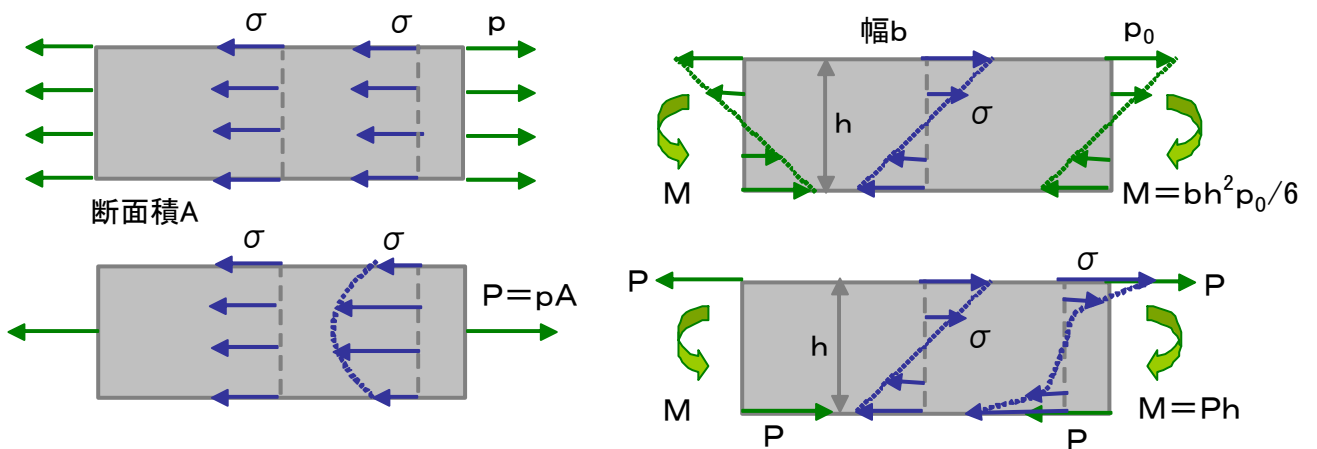


図-2.5 サンブナンの原理 (a:単純引張 b:曲げ)

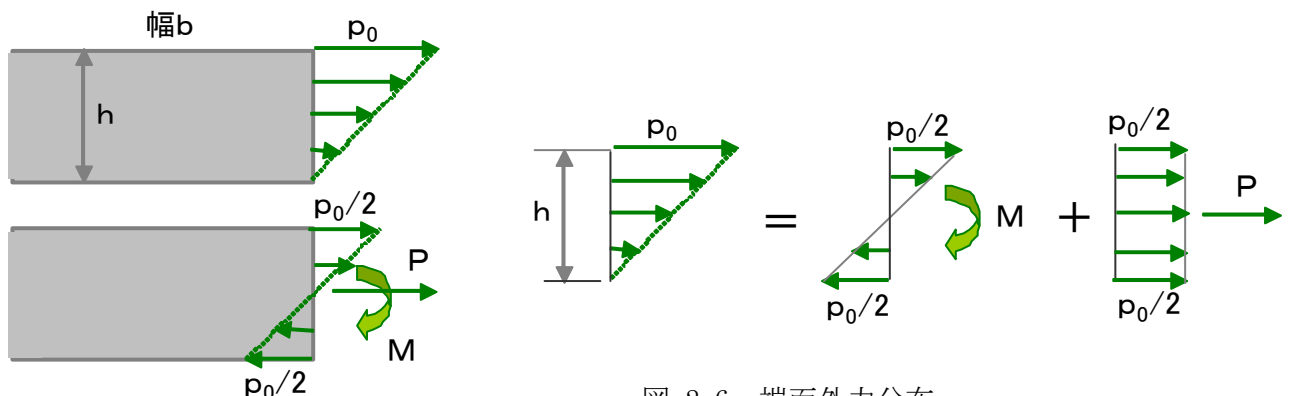


図-2.6 端面外力分布

図-2.6のように、端面に一次的に分布する外力を受ける場合には、これを静力学的に同等な荷重（下式の垂直力PとモーメントM）に置き換えれば、端面近傍を除いて同じ応力状態になる。

$$P = \frac{bh}{2} p_0 \quad M = 2 \cdot \left(\frac{bh}{8} p_0 \right) \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{h}{2} \right) = \frac{p_0 bh^2}{12}$$

図-2.7のような梁についても同様に、荷重点D及び支点A, Bの近傍に対しては梁理論の結果が適用できないから、梁理論は高さに比べて長さが非常に長い梁の変形及び荷重点、支点及び端の近傍を除く部分の応力を解析する場合にのみ適用できる。

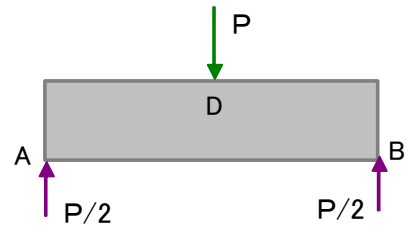


図-2.7 単純支持梁

【例題1】pを定数として、以下の応力成分が弾性基礎方程式の厳密解であるかどうかを調べ、厳密解ならば、どのような境界条件の下での解であるかを図示せよ。

$$\sigma_x = p, \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0$$

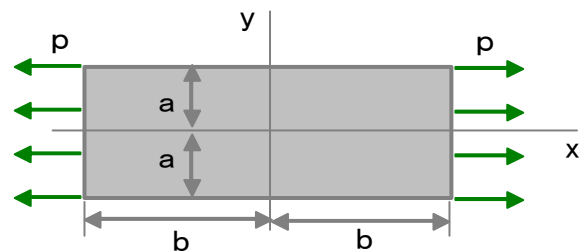


図-2.8 例題1：単軸引張

【解】上の応力成分を式(2.22)の応力のつり合い式、及び式(2.23)の応力の適合条件式に代入すれば、 $X=Y=0$ なら

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial 0}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial 0}{\partial x} + \frac{\partial 0}{\partial y} = 0 \quad \nabla^2(p+0) = 0$$

であるから、両条件式を満足し、厳密解である。そして周辺においては

$$(\sigma_x)_{x=\pm b} = p \quad (\sigma_y)_{y=\pm a} = 0 \quad (\tau_{xy})_{x=\pm b} = (\tau_{xy})_{y=\pm a} = 0$$

であるから、この解は図-2.8のように、x方向に一様に引張られる長方形板に対する厳密解である。

※ 図-2.9のような場合は

$$(\sigma_x)_{x=\pm b} = 0 \quad (|y| > c), = p \quad (|y| < c)$$

$$(\sigma_y)_{y=\pm a} = 0$$

$$(\tau_{xy})_{x=\pm b} = (\tau_{xy})_{y=\pm a} = 0$$

であるから、上の応力成分はこの場合に対する厳密解ではない。しかし、サンブナンの原理によって両端近傍を除けば一様な応力状態になり、 $\sigma_x = p c / a$ である。

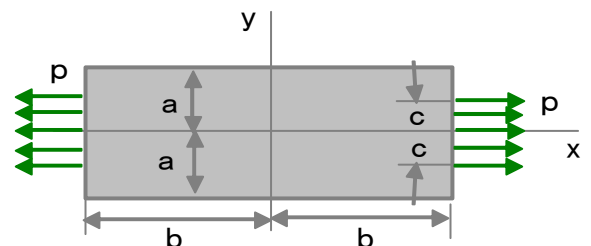


図-2.9 端面の部分的な引張

【例題2】 p を定数として、以下の応力成分は、図-2.10 に示すような周辺に一樣な圧力を受ける円板に対する厳密解になっていることを示せ。

$$\sigma_x = \sigma_y = -p, \quad \tau_{xy} = 0$$

【解】 上の3つの応力成分は明らかに応力のつり合い式と適合条件を満足しており、これを極座標に変換すれば（以下の座標変換を導け）

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2 \tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ &= -p (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = -p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - 2 \tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ &= -p (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = -p \end{aligned}$$

$$\tau_{r\theta} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 0$$

となるから、境界条件 $(\sigma_r)_{r=a} = -p$, $(\tau_{r\theta})_{r=a} = 0$ を満足している。よって、この応力成分は図-2.10 の場合に対する厳密解である。

※ 図-2.11 の場合は境界条件が

$$(\sigma_r)_{r=a} = -p, \quad (\sigma_r)_{r=b} = (\tau_{r\theta})_{r=a} = (\tau_{r\theta})_{r=b} = 0$$

だから、上の応力成分はこの場合に対する厳密解ではない。

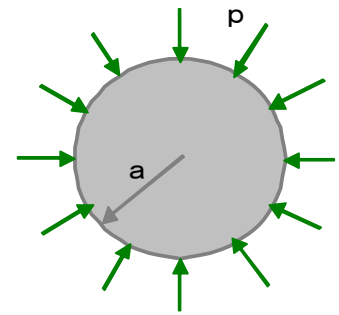


図-2.10 円板の問題

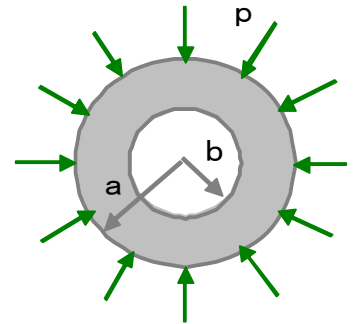


図-2.11 円管の問題

〔演習問題〕

(1) 物体力がないとき、次の応力状態は弾性基礎方程式の厳密解であるかどうかを調べよ。厳密解になり得るなら、どのような境界条件の下での解であるかを図示せよ。A は定数である。

a) $\sigma_x = A y^2, \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0$

b) $\sigma_x = A x^2, \quad \sigma_y = -A y^2, \quad \tau_{xy} = 2A x y$

c) $\sigma_x = A x y, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = -A y^2 / 2$

d) $\sigma_x = A(x^2 y - 2 y^3 / 3), \quad \sigma_y = -A y^3 / 3, \quad \tau_{xy} = -A x y^2$

e) $\sigma_x = A y, \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0$

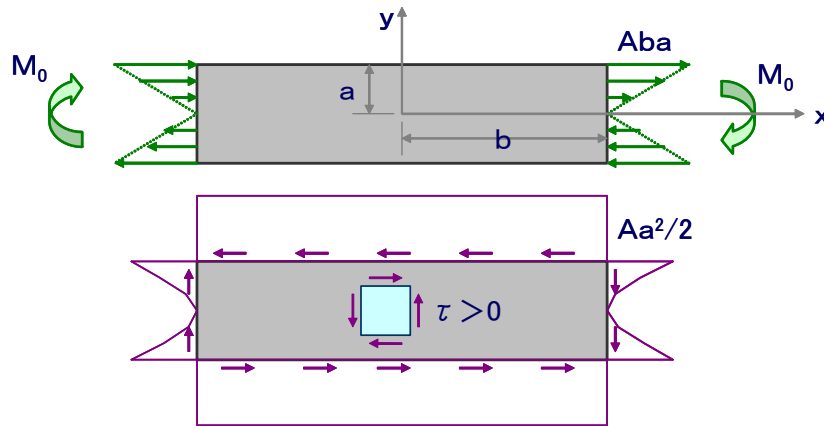
< 解 1 >

c) つり合い式と適合条件式を満たし、厳密解である。

$$x: \frac{\partial}{\partial x}(Axy) + \frac{\partial}{\partial y}(-Ay^2/2) = 0 \quad y: \frac{\partial}{\partial x}(-Ay^2/2) + \frac{\partial}{\partial y}(0) = 0 \quad \nabla^2(Axy + 0) = 0$$

端部にモーメント M_0 が右回りに作用する梁内の応力解である。端部のモーメント M_0 は、上下辺に働くせん断応力による左回りのモーメント M_1 と、両端部に働くせん断応力による右回りのモーメント M_2 の差に対応する ($M_0 = M_1 - M_2$)。各量は

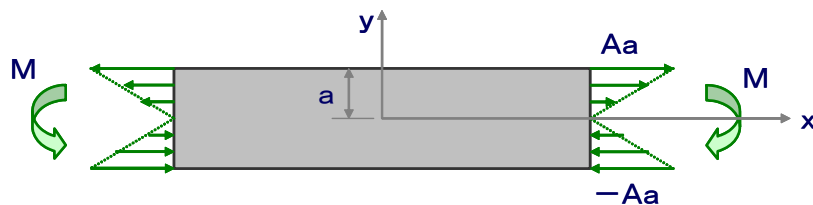
$$M_0 = 2 \int_0^a A b y \cdot y dy = \frac{2 A b a^3}{3} \quad M_1 = \frac{A a}{2} \times 2 b \times a = A b a^2 \quad M_2 = b \times \int_{-a}^a \frac{A y^2}{2} dy = \frac{A b a^3}{3}$$



e) つり合い式と適合条件式を満たし、厳密解である。

図のように、 x によらない一様曲げを受ける梁内の応力を与える。

$$\sigma = \sigma_x = \frac{M}{I} y, \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \quad M = 2 \int_0^a A y \cdot y dy = \frac{2}{3} A a^3$$



(2) 図-2.12 のような台形板の両端に単位面積当り p_1, p_2 の等分布荷重が作用するとき

$$\sigma_x = \frac{p_1 + p_2 + (p_1 - p_2)/2}{2}, \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0$$

が厳密解になり得るか否かを調べよ。

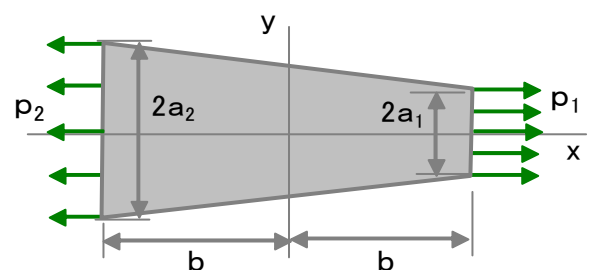


図-2.12

<解2>

x 方向のつり合い式: $\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x) + \frac{\partial}{\partial y}(0) = \frac{p_1 - p_2}{2b}$ であり、他の条件式は満たす。したがって、厳密解であるためには $p_1 = p_2$ (単純引張) である必要がある。

2.5 応力関数を用いた平面応力問題の解法

ある関数を χ として

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \quad (2.33)$$

と表せば、式(2.22)の③の応力のつり合い式

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (2.22③)$$

は満足され、式(2.24)の応力の適合条件式は

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla^2 \nabla^2 \chi = 0 \quad (2.35)$$

となる。したがって、 $\nabla^4 \chi = 0$ を満足する解を求めれば、応力は式(2.33)で得られ、それらは応力のつり合い式と適合条件を満足して、厳密解になる。このように応力ある関数 χ の微分形で表すとき、 χ を**応力関数** (stress function) という。(Airy の応力関数という)

〔例題1〕長方形板の一軸引張り

y^2 は式(2.35)の解である。そこで A を未定定数として $\chi = Ay^2$ と置けば

$$\sigma_x = 2A \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0$$

となるから、 $A = p/2$ と置けば

$$\sigma_x = p \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0$$

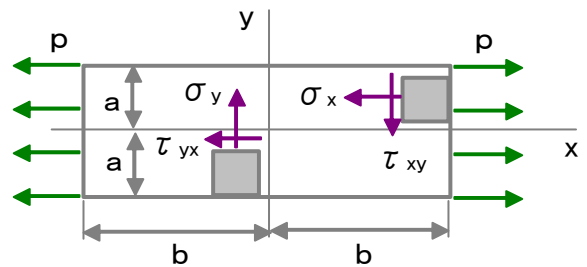


図-2.14 一軸引張り

になる。そして、 $x = \pm b$ で $\sigma_x = p$ 、 $\tau_{xy} = 0$ となり、 $y = \pm a$ で $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ であるから、これは x 軸方向に一様に引張られた長方形板 (図-2.14) に対する厳密解である。

変位を求めるには、応力～ひずみ関係と、ひずみ～変位関係を用いて

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \sigma_y) \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu \sigma_x)$$

とし、 $E = 2G(1 + \nu)$ を代入して、 E の代わりに G を用いれば

$$2G \frac{\partial u}{\partial x} = -\sigma_y + \frac{1}{1 + \nu}(\sigma_x + \sigma_y) \quad 2G \frac{\partial v}{\partial y} = -\sigma_x + \frac{1}{1 + \nu}(\sigma_x + \sigma_y) \quad (2.36)$$

と表せる。応力の適合条件式によって $(\sigma_x + \sigma_y)$ は調和関数であり、調和関数を x, y で微分したのも調和関数であるから、 ϕ を任意の調和関数として

$$\sigma_x + \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (2.37)$$

と置けば、式(2.36)は次のようになる。

$$2G \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad 2G \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} + \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

両辺を x あるいは y で積分すれば

$$2Gu = -\frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad 2Gv = -\frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (2.38)$$

ここで、 $\nabla^2 \phi = 0$ 、 $\nabla^4 \chi = 0$ である。そして式(2.37)に式(2.33)を代入すれば、 ϕ と χ との間に次のような関係があることが分かる。

$$\nabla^2 \chi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (2.39)$$

故に、 χ が決まれば式(2.39)によって ϕ が決まり、式(2.38)によって変位が求められる。

〔例題 2〕 長方形板の一軸引張り (〔例題 1〕 で変位を求める)

$\chi = p y^2/2$ であるから、式(2.39)より

$$p = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \rightarrow \phi = pxy + f(x) + g(y) + C$$

ここで、 $f(x)$ 、 $g(y)$ 、 C はそれぞれ x のみ、 y のみの関数及び定数である。これらを全てゼロと考えても xy は調和関数であるから、 $\phi = pxy$ とすれば、

$$2Gu = 0 + \frac{1}{1+\nu} px \rightarrow u = \frac{px}{E}$$

$$2Gv = -py + \frac{1}{1+\nu} py = -\frac{\nu}{1+\nu} py \rightarrow v = -\frac{\nu py}{E}$$

となって既知の結果に一致する。 $f(x)$ 、 $g(y)$ 、 C をゼロにしなければ、上記の ϕ を使って

$$2Gu = \frac{1}{1+\nu} \{px + g'(y)\} \quad 2Gv = -py + \frac{1}{1+\nu} \{py + f'(x)\}$$

そして、 $\tau_{xy} = 0$ すなわち $\gamma_{xy} = 0$ であるから

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2G(1+\nu)} \cdot \{g''(y) + f''(x)\} = 0$$

$g''(y) = f''(x) = 0$ とすれば $g' = c_2$ 、 $f' = c_3$ (剛体変位)、 $g''(y) = c_1 = -f''(x)$ とすれば $g' = c_1 y$ 、 $f' = -c_1 x$ (剛体回転) が付加される。そこで、一般には $f(x) = g(y) = 0$ としてよい。

〔例題3〕 梁の単純曲げ

$\chi = Ay^3$ と置けば、 $\sigma_x = 6Ay$ 、 $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ となるから、これは図-2.15のように長方形板の両端面にのみ垂直応力が一次的に分布する場合を示しており、その作用をモーメントMで表現すれば

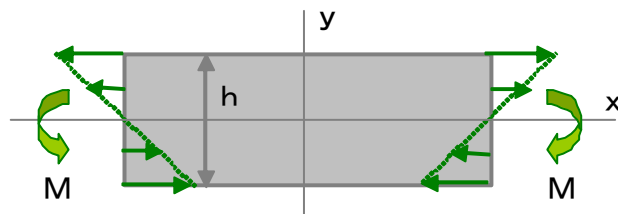


図-2.15 単純曲げ

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x y dy = \frac{A}{2} h^3 \rightarrow A = \frac{2M}{h^3}$$

したがって、 $\sigma_x = 12My/h^3$ 、 $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ である。

次に、 $\nabla^2 \chi = 6Ay$ であるから、式(2.39)を通じて ϕ を求めると

$$6Ay = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x} = 3Ay^2 + f'(x) \rightarrow \phi = 3Axy^2 + f(x) + g(y)$$

$x y^2$ は調和関数でないから、 ϕ が調和関数になるように $f = -Ax^3$ と決めれば、 $\phi = A(3x y^2 - x^3)$ 、そして変位は式(2.38)より次のように得られる。

$$2Gu = 0 + \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{2M}{h^3} (6xy) = \frac{12Mxy}{(1+\nu)h^3} \rightarrow u = \frac{12Mxy}{Eh^3}$$

$$2Gv = -\frac{6My^2}{h^3} + \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{2M(3y^2 - 3x^2)}{h^3} = -\frac{6M}{h^3} \cdot \frac{(x^2 + \nu y^2)}{1+\nu} \rightarrow v = -\frac{6M(x^2 + \nu y^2)}{Eh^3}$$

円板や扇形板の問題では極座標を用いるのが便利であるが、極座標で応力のある関数の微分形で表示することは容易ではない。そこで、座標変換によって直角座標における応力から極座標における応力を導くことにする。すなわち、座標変換は前節〔例題2〕を参照して

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \sigma_\theta &= \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \tau_{r\theta} &= -(\sigma_x - \sigma_y)/2 \cdot \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \end{aligned}$$

であるから、これに式(2.33)を代入すれば

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \left(\sin^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \sin 2\theta \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) \chi \\ \sigma_\theta &= \left(\cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \sin 2\theta \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) \chi \\ \tau_{r\theta} &= \left\{ \frac{1}{2} \sin 2\theta \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - \cos 2\theta \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right\} \chi \end{aligned} \quad (2.40)$$

偏微分の性質を利用して x, y による微係数を r, θ による微係数に変えると (途中省略)

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} \quad \tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \chi}{r \partial \theta} \right) \quad (2.41)$$

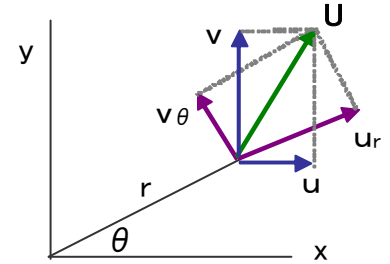
次に r, θ 方向の変位を u_r, v_θ とすれば、右図より

$$u_r = u \cos \theta + v \sin \theta, \quad v_\theta = -u \sin \theta + v \cos \theta$$

であるから、これに式(2.38)の u, v を代入すれば

$$2Gu_r = \left(-\frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \cos \theta + \left(-\frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \sin \theta$$

$$2Gv_\theta = -\left(-\frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \sin \theta + \left(-\frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \cos \theta$$



両式右辺の微分を r, θ の微分に置き換えるために、応力関数 χ と

$$\nabla^2 \chi = \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} (r\psi) \quad (2.42)$$

なる関係を有する新たな調和関数 Ψ ($\nabla^2 \Psi = 0$) を導入すれば

$$2Gu_r = -\frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{1+\nu} \cdot r \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad 2Gv_\theta = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial \theta} + \frac{1}{1+\nu} \cdot r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (2.43)$$

〔例題4〕等分布荷重を受ける円板

r^2 は重調和関数だから $\chi = Ar^2$ と置けば、式(2.41)より

$$\sigma_r = 2A, \quad \sigma_\theta = 2A, \quad \tau_{r\theta} = 0$$

そこで、 $2A = -p$ と置けば

$$\sigma_r = -p, \quad \sigma_\theta = -p, \quad \tau_{r\theta} = 0$$

この解は $(\sigma_r)_{r=a} = -p, (\tau_{r\theta})_{r=a} = 0$ となるから、図-2.16 のように周辺に等分布圧力 p を受ける円板の応力状態を表している。変位を求めるためには式(2.42)より、まず Ψ を求めなければならないから、 $\nabla^2 \chi = -2p$ であることに注目して、順次積分すれば

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} (r\psi) = -2p &\quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \theta} (r\psi) = -2pr + g'(\theta) \\ r\psi = -2pr\theta + g(\theta) + rf(r) \\ \psi = -2p\theta + g(\theta)/r + f(r) \end{aligned}$$

θ は調和関数であるから $g = f = 0$ と置けば $\Psi = -2p\theta$ であり、式(2.43)より次式を得る。

$$u_r = -\frac{p(1-\nu)r}{E} \quad v_\theta = 0$$

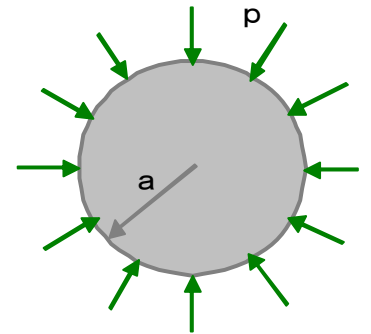


図-2.16 円板の問題

※応力成分を求めたあと、応力～ひずみ関係とひずみ～変位関係を用いて、 r 、 θ 方向のひずみを積分する形で変位を計算しても同じ答えを得る。

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{\sigma_r - \nu\sigma_\theta}{E} = -\frac{p(1-\nu)}{E} \rightarrow u_r = -\frac{p(1-\nu)r}{E}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{\partial v_\theta}{r\partial\theta} + \frac{u_r}{r} = \frac{\sigma_\theta - \nu\sigma_r}{E} = -\frac{p(1-\nu)}{E} \rightarrow \frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} = 0 \rightarrow v_\theta = 0$$

〔例題5〕円孔面に内圧を受ける無限板

図-2.17 の円孔を有する無限板では、中心 $r=0$ で応力は無限大になっても良いが、 $r \rightarrow \infty$ ではゼロにならなければならない。 $r \rightarrow \infty$ でゼロになる調和関数は、どこかに必ず特異点をもつ必要があるから、 $r=0$ に特異点をもつ関数を用い、応力が θ に無関係であることに注目して、 $\chi = B \log r$ と置けば

$$\sigma_r = B/r^2, \quad \sigma_\theta = -B/r^2, \quad \tau_{r\theta} = 0$$

$\nabla^2 \chi = 0$ であるから、式(2.42)より

$$\frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} (r\psi) = 0 \rightarrow \psi = 0 \rightarrow 2Gu_r = -\frac{B}{r} \quad 2Gv_\theta = 0 \quad \text{図-2.17 円孔の問題}$$

ここで、 $(\sigma_r)_{r=a} = -p$ でなければならないから、 $B = -p a^2$ となり、結局、次の解を得る。

$$\sigma_r = -\frac{a^2 p}{r^2} \quad \sigma_\theta = \frac{a^2 p}{r^2} \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad u_r = \frac{1+\nu}{E} \cdot \frac{a^2 p}{r} \quad v_\theta = 0$$

※前例題と同様に、 r 、 θ 方向のひずみを積分する形で変位を計算すると

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{\sigma_r - \nu\sigma_\theta}{E} = -\frac{a^2 p}{r^2} \cdot \frac{1+\nu}{E} \rightarrow \int \frac{dr}{r^2} = \left[\frac{-1}{r} \right] \rightarrow u_r = \frac{1+\nu}{E} \cdot \frac{a^2 p}{r}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{\partial v_\theta}{r\partial\theta} + \frac{u_r}{r} = \frac{\sigma_\theta - \nu\sigma_r}{E} = \frac{a^2 p}{r^2} \cdot \frac{1+\nu}{E} \rightarrow \frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} = 0$$

〔例題6〕内外圧を受ける円板

図-2.18 のような場合は、応力関数は同心円内においてのみ特異点をもたないものでなければならない、原点に特異点をもつ関数と無限遠点に特異点をもつ関数の一次結合で与えられる。すなわち

$$\chi = A r^2 + B \log r \quad (a)$$

と置けば、式(2.41)より

$$\sigma_r = 2A + B/r^2, \quad \sigma_\theta = 2A - B/r^2, \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad (b)$$

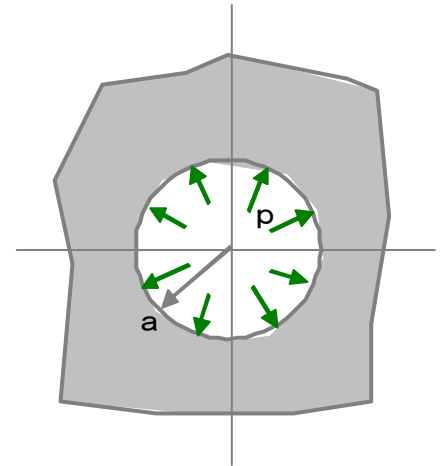


図-2.17 円孔の問題

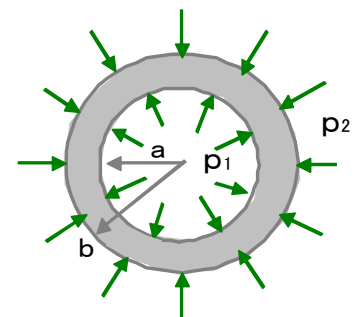


図-2.18 同心円板の問題

よって、 $(\sigma_r)_{r=a} = -p_1$, $(\sigma_r)_{r=b} = -p_2$ と置けば

$$2A + B/a^2 = -p_1, \quad 2A + B/b^2 = -p_2 \quad (c)$$

となり、両式を解いてA, Bを求め、式(b)に代入して

$$\sigma_r = \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left\{ \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) p_1 - \left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{b^2}{r^2} \right) p_2 \right\} \quad \sigma_\theta = \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left\{ \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) p_1 - \left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{b^2}{r^2} \right) p_2 \right\} \quad (d)$$

変位を求めるためには〔例題4, 5〕を参照して、 $\Psi = 4\theta A$ になるから

$$2Gu_r = \frac{2(1-\nu)}{1+\nu} rA - \frac{B}{r} \quad \rightarrow \quad u_r = \frac{1-\nu}{E} \cdot \frac{a^2 p_1 - b^2 p_2}{b^2 - a^2} r + \frac{1+\nu}{E} \cdot \frac{a^2 b^2 (p_1 - p_2)}{b^2 - a^2} \cdot \frac{1}{r} \quad (e)$$

この結果は材料力学で導いた結果に一致する^(*)。

※材料力学では、 $\sin(d\theta/2) \doteq d\theta/2$ として半径方向の平衡式が

$$\sigma_r(r d\theta) - (\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)d\theta + \sigma_\theta(dr d\theta) = 0$$

整理して $\frac{d\sigma_r}{\sigma_r - \sigma_\theta} + \frac{dr}{r} = 0 \quad \dots \textcircled{1}$

σ_r, σ_θ は θ を含まず、 ε_z は r に無関係 (平面保持) で

$$\frac{d\varepsilon_z}{dr} = \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{E} \{ \sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) \} \right] = 0$$

$$\rightarrow \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{d\sigma_\theta}{dr} = 0 \quad (\sigma_z = 0)$$

より $(\sigma_r + \sigma_\theta) = \text{const.} = c_1 \quad \dots \textcircled{2}$

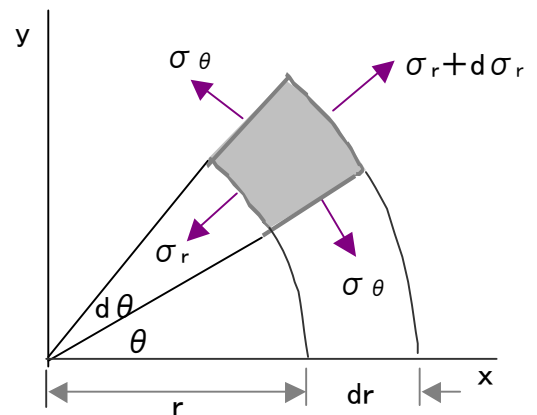
②を①に代入して $\frac{d\sigma_r}{2\sigma_r - c_1} + \frac{dr}{r} = 0$

積分して $(1/2) \ln(2\sigma_r - c_1) + \ln r = \text{const.} \quad \rightarrow \quad r^2(2\sigma_r - c_1) = c_2$

$$\sigma_r = \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2r^2} = 2A + \frac{B}{r^2} \quad \sigma_\theta = \frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{2r^2} = 2A - \frac{B}{r^2} \quad \dots > \text{式(b)}$$

境界条件より A, Bを決めて、式(d)を得る。また、変形は

$$\varepsilon_r = \frac{du_r}{dr} = \frac{1}{E} \{ \sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z) \} = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu\sigma_\theta) \quad \text{を積分して} \quad \dots > \text{式(e)}$$



ある関数を V として、薄い板がその面に

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad (2.44)$$

なる物体力 X, Y を受ける場合を考える。重力や遠心力などの物体力は全てこのような形で与えられるからである。(重力の場合、物体力: $Y = -\partial V / \partial y = -m g \rightarrow V = m g \times y = \gamma y$)

特解は $\sigma_x = V, \sigma_y = V, \tau_{xy} = 0$ であるから

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} + V \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + V \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \quad (2.45)$$

は応力のつり合い式(2.22)を満足し、適合条件式(2.23)に式(2.44)を代入すれば

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = -(1+\nu) \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) = (1+\nu) \nabla^2 V \quad (2.46)$$

これに式(2.45)を代入すれば、 χ が満足すべき方程式は次のようになる。

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = \nabla^4 \chi + 2\nabla^2 V = (1+\nu) \nabla^2 V \rightarrow \nabla^4 \chi = -(1-\nu) \nabla^2 V \quad (2.47)$$

$$\text{※平面ひずみでは } \nabla^4 \chi = -\frac{1-2\nu}{1-\nu} \nabla^2 V$$

次に変位を求めるために、 ϕ を任意の調和関数として式(2.46)より (ϕ が調和関数: $\nabla^2 \phi = 0$ なら、式(2.48)に ∇^2 を行くと右辺第1項が消える)

$$\sigma_x + \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + (1+\nu) V \quad (2.48)$$

になるから、式(2.36)に式(2.45)(2.48)を代入すれば、変位は物体力がない場合と同じ式で表され

$$2G \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - V + \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + V \quad \text{などより}$$

$$2Gu = -\frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad 2Gv = -\frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (2.49)$$

ただし、 χ と ϕ の関係は異なり、式(2.48)に式(2.45)を代入すれば次のようになる。

$$\nabla^2 \chi + 2V = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + (1+\nu) V \rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \nabla^2 \chi + (1-\nu) V \quad (2.50)$$

〔例題7〕自重を受ける板

図-2.19 のように、垂直に吊るされた長方形板に単位体積当り γ の自重が作用すれば、 $X = \gamma$ 、 $Y = 0$ であるから、式(2.44)より

$$V = -\gamma x \quad (a)$$

である。そして $\nabla^2 V = 0$ であるから、式(2.47)より χ は $\nabla^4 \chi = 0$ を満足すればよい。そこで

$$\chi = A x^3 + B x^2 \quad (b)$$

と置けば、式(a)(b)を式(2.45)に代入して

$$\sigma_x = 2B - \gamma x \quad \sigma_y = 6Ax - \gamma x \quad \tau_{xy} = 0 \quad (c)$$

よって $A = \gamma/6$ と置けば $(\sigma_y)_{y=\pm a} = 0$ となり、 $(\sigma_x)_{x=L} = 0$ と置けば $B = \gamma L/2$ となり境界条件が満足される。結局、応力関数 χ と3つの応力成分は次式で与えられる。

$$\chi = \gamma \left(\frac{x^3}{6} + \frac{L}{2} y^2 \right) \quad (d) \quad \rightarrow \quad \sigma_x = -\gamma(x-L), \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \quad (e)$$

変位を求めるためには式(2.50)より

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \gamma(\nu x + L) \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = \gamma(\nu xy + Ly + f'(x)) \quad \phi = \gamma(\nu x^2 y / 2 + Lxy + f(x) + g(y) + c)$$

ここで $x^2 y$ は調和関数ではないから

$$g(y) = -\nu y^3 / 6 \quad f(x) = 0 \quad c = 0 \quad (f)$$

となり、 ϕ は調和関数となって、式(d)(f)を式(2.49)に代入すれば、次式を得る。

$$u = \frac{\gamma}{E} \left(Lx - \frac{x^2 + y^2}{2} \right) \quad v = \frac{\gamma}{E} (x-L)y \quad (g)$$

$u_{x=0} = -\gamma y^2 / 2E$ 、 $v_{x=0} = -\nu \gamma Ly / E$ であるから、辺 $x = 0$ で変位が拘束されなければ上の結果は正しいが、 $x = 0$ が固定される場合には、この結果は固定辺近傍を除いて適用できる。そして

$$v_{x=L} = 0 \quad u_{x=L} = \frac{\gamma L^2}{2E} \quad (h)$$

となって材料力学で得られる結果に一致する(*)。

※材料力学では以下のように誘導される。

$$\sigma_x = \gamma(L-x), \quad \varepsilon_x = \sigma_x / E$$

$$u_x = \int_0^x \varepsilon_x dx = \frac{\gamma}{E} \left(Lx - \frac{x^2}{2} \right) \quad \rightarrow \quad (u_x)_{x=L} = \frac{\gamma L^2}{2E}$$

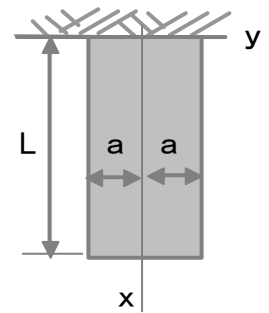


図-2.19 自重を受ける板

