

# 第1章 応力とひずみ

## 1.1 応力+

### (1) 応力の定義

- 単位面積当りの内力を「応力」と呼び

$$\text{応力} : p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} (\Delta F / \Delta A) \quad (1.1)$$

で定義される。この $\Delta F$ を面に垂直・平行の2成分( $\Delta F_n$ ,  $\Delta F_t$ )に分解すると、対応して

$$\text{垂直応力} : \sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} (\Delta F_n / \Delta A)$$

$$\text{せん断応力} : \tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} (\Delta F_t / \Delta A) \quad (1.2)$$

が定義される (図-1.1)。せん断応力 $\tau$ は更に、面内の直交座標 $x_1$ ,  $x_2$ 方向のせん断応力に分解できる。つまり、ある面上の合応力 $p$ は1つの垂直応力と2つのせん断応力成分に分解できる。

- 直交座標 $x$ ,  $y$ ,  $z$ を用いて、物体内の微小直方体に作用する応力成分を示すと 図-1.2 になる。各面に作用する応力は座標方向の3つの応力成分に分解でき (垂直1, せん断2)、これらは正 (負)の面に対し正 (負)方向に働く成分を正として扱う。引張の垂直応力を正とするので“引張正の約束”という。 $\tau_{ij}$ の添字 $i$ は応力の作用面、 $j$ は応力の作用方向を意味する。 $\sigma_i$ は $\sigma_{ii}$ の略である。この様に通常は垂直応力に $\sigma$ 、せん断応力に $\tau$ を使うが、全ての応力を $\sigma_{ij}$  ( $i, j=x, y, z$ )とまとめて書くこともある。なお図の直方体には、表面に応力 $\sigma_{ij}$ が、内部に重力や慣性力などの物体力 $X_i$  (体積分布力)が作用する。

- 全ての応力成分は座標の関数であるから、例えば、 $\sigma_x = \sigma_x(x, y, z)$ と表される。図で正の面の $\sigma_x'$ と負の面の $\sigma_x$ は $dx$ だけ隔たっているから、高次の微小量を省略すると、両者の関係は※

$$\sigma_x' = \sigma_x + \Delta\sigma_x = \sigma_x + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} dx \quad (1.3)$$

※Taylor展開:  $f(x) = f(a) + (\Delta x/1!) f'(a) + (\Delta x^2/2!) f''(a) + \dots$  において  $a \rightarrow x$ と置き換え、 $\Delta x$ の2次以上を省略すると、 $\Delta f = f(x) - f(a) \doteq (df/dx) \Delta x$

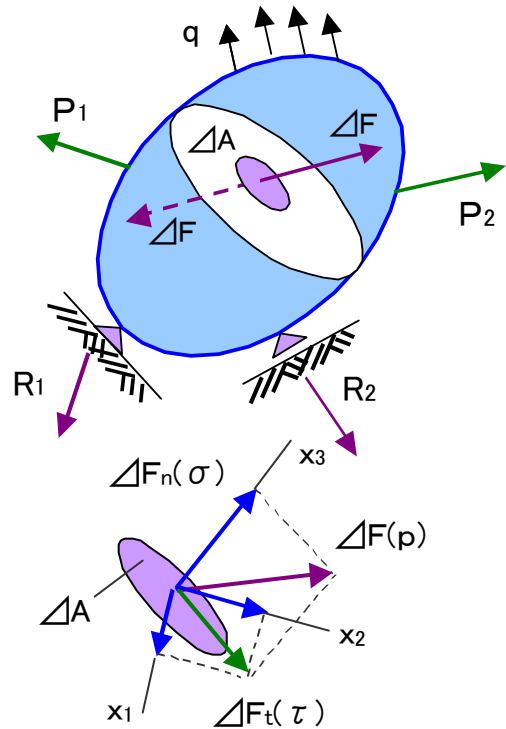


図-1.1 応力の分解

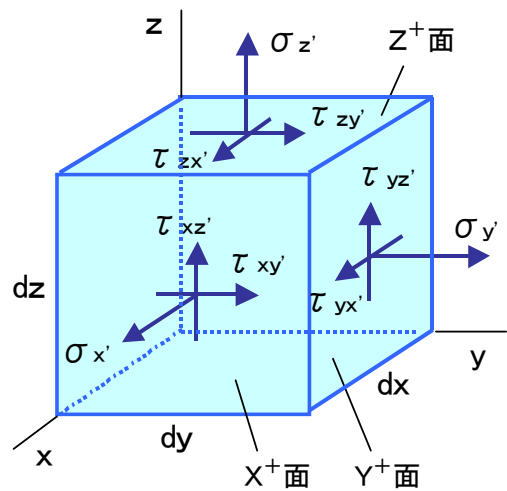


図-1.2 直角座標応力成分

(2) 応力のつり合い方程式

- 図-1.2において、微小直方体の x 軸回りの回転には  $\tau_{yz}, \tau_{zy}, \tau_{yz}', \tau_{zy}'$  のみが関与するので (垂直応力と物体力は中心に対し対称に作用するので、回転に効かない)、x 軸回りのモーメントのつり合い条件を考えると

$$\begin{aligned} (\tau_{yz} + \tau_{yz}') dx dz \times dy / 2 &= (\tau_{zy} + \tau_{zy}') dx dy \times dz / 2 \\ \rightarrow \tau_{yz} + \triangle \tau_{yz} / 2 &= \tau_{zy} + \triangle \tau_{zy} / 2 \quad (\tau_{yz}' = \tau_{yz} + \triangle \tau_{yz} \text{ など}) \\ \rightarrow \tau_{yz} &= \tau_{zy} \quad (dx, dy, dz \rightarrow 0 \text{ で } \triangle \tau_{yz}, \triangle \tau_{zy} \rightarrow 0) \end{aligned}$$

となる。他のせん断応力成分についても同様の関係が得られ、まとめると

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (1.4)$$

これら対をなすせん断応力を「共役せん断応力」と呼び、モーメントのつり合い条件と等価な関係式を与える。つまり、共役せん断応力を設定すればモーメントつり合いは自動的に満たされる。以上から、3次元応力状態における独立な応力成分は以下の6つになる。

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy} \quad (1.5)$$

- 図-1.2の微小直方体は、静止状態では表面の応力と物体力 (通常は重力) の作用の下でつり合い状態にある。運動を考える場合は、物体力の一部として慣性力  $-\rho(u^*, v^*, w^*)$  を考慮する必要がある。ここで、 $\rho$  は物体の密度、 $u^* = \partial^2 u / \partial t^2$  等は (x, y, z) 方向の変位 (u, v, w) に対応する加速度であり、負符号が付くのは慣性力が変位方向と逆に作用するためである。この図で、x 方向の力のつり合い式を立てると

$$(\sigma_x' - \sigma_x) dy dz + (\tau_{yx}' - \tau_{yx}) dz dx + (\tau_{zx}' - \tau_{zx}) dx dy + (X - \rho u^*) dx dy dz = 0$$

であり、式(1.3)などの関係を用いると、次式を得る。 <誘導せよ>

$$\begin{aligned} x : \quad & \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = \rho u^* \\ \text{同様に } y : \quad & \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = \rho v^* \\ z : \quad & \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = \rho w^* \end{aligned} \quad (1.6)$$

これを「応力のつり合い方程式」と呼ぶ。静的な問題では慣性力項を考えなくてもよいので、通常の応力・変形問題では右辺は0である。

2次元の応力つり合い式は、上式で z に関する項をすべて取り除いて、次式で与えられる。

$$x : \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = \rho u^* \quad y : \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = \rho v^* \quad (1.7)$$

(3) 応力の座標変換 (任意面上の応力)

●物体内の1点Oの近傍で微小直方体を任意の方向に切断して現れた面を図-1.3のABCとし、面と垂直にξ軸( $l_1, m_1, n_1$ )を、面内に相直交するη軸( $l_2, m_2, n_2$ )とζ軸( $l_3, m_3, n_3$ )を設ける。この面に作用する合応力pは種々の方向に分解できるが、まず座標軸方向に分解した時の応力成分( $p_x, p_y, p_z$ )と式(1.5)の直角座標応力成分の関係を調べる。任意面ABCの面積を $\Delta$ とし、微小三角錐に働く力のつり合いを考えると、例えばx方向では

$$p_x \Delta = \sigma_x \cdot OBC + \tau_{xy} \cdot OAC + \tau_{zx} \cdot OAB$$

$$= \sigma_x (l_1 \Delta) + \tau_{xy} (m_1 \Delta) + \tau_{zx} (n_1 \Delta)$$

となる。y, z方向も同様であり、まとめると

$$\begin{aligned} p_x &= l_1 \sigma_x + m_1 \tau_{xy} + n_1 \tau_{zx} \\ p_y &= l_1 \tau_{xy} + m_1 \sigma_y + n_1 \tau_{yz} \\ p_z &= l_1 \tau_{zx} + m_1 \tau_{yz} + n_1 \sigma_z \end{aligned} \quad (1.8)$$

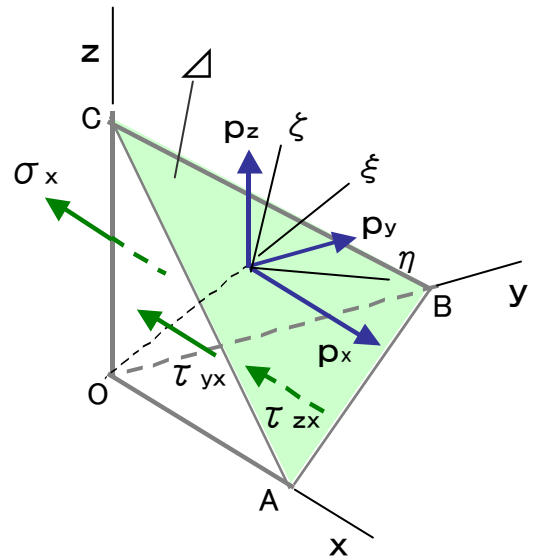


図-1.3 任意面上の応力

を得る。このように任意面上の応力成分は6つの直角座標応力成分で一意的に表せるが、直角座標応力が一定でも面の方向( $l_1, m_1, n_1$ )が変われば( $p_x, p_y, p_z$ )も変化するので、応力は考える面によって値を異にする。すなわち、応力は(面の方向を規定すれば)力と同様に矢印で表現してベクトル量として扱うことができるが(このとき「応力ベクトル」と称す)、断面の方向を変えると対応して応力ベクトルの大きさ・方向も変化するので、本来のベクトル量とは異なる力学量であり、後述のようにテンソル量と称される。

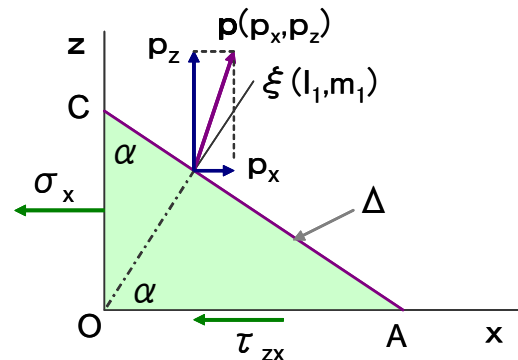
※二次元(x, z)では、x方向で

$$p_x \Delta = \sigma_x \cdot OC + \tau_{zx} \cdot OA$$

$$\rightarrow p_x = l_1 \sigma_x + m_1 \tau_{zx}$$

$$OC = \Delta \cdot \cos \alpha = l_1 \cdot \Delta$$

$$OA = \Delta \cdot \sin \alpha = m_1 \cdot \Delta$$



●ξ軸の方向余弦( $l_1, m_1, n_1$ )はξ軸上の単位ベクトル( $|\xi| = 1$ )の座標成分を表すから、これとABC面上の応力ベクトルp( $p_x, p_y, p_z$ )との内積がpのξ軸方向の成分、すなわち面に働く垂直応力成分 $\sigma_\xi$ を与える。つまり、ξ軸とpの交角をθとして

$$\text{内積} [\xi \cdot p] = l_1 p_x + m_1 p_y + n_1 p_z = |\xi| |p| \cos \theta = |p| \cos \theta \rightarrow \sigma_\xi$$

同様にして、pのη軸, ζ軸方向の成分は、面内で相直交する2つのせん断応力を与えるから、ξ η ζ軸方向の応力成分とx y z軸方向の応力成分の関係は次のようになる。

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi} &= l_1 p_x + m_1 p_y + n_1 p_z \\ \tau_{\xi\eta} &= l_2 p_x + m_2 p_y + n_2 p_z \\ \tau_{\xi\zeta} &= l_3 p_x + m_3 p_y + n_3 p_z\end{aligned}\quad (1.9)$$

※すなわち、 $\mathbf{p} = \mathbf{p}(p_x, p_y, p_z) = \mathbf{p}(\sigma_{\xi}, \tau_{\xi\eta}, \tau_{\xi\zeta})$

したがって、式(1.9)に式(1.8)を代入すると、 $\xi\eta\zeta$ 座標系と $xyz$ 座標系の応力成分の関係が導かれ、これは応力の座標変換式に対応する。例えば、 $\sigma_{\xi}$ 、 $\tau_{\xi\eta}$ は

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi} &= l_1^2 \sigma_x + m_1^2 \sigma_y + n_1^2 \sigma_z + 2(l_1 m_1 \tau_{xy} + m_1 n_1 \tau_{yz} + n_1 l_1 \tau_{zx}) \\ \tau_{\xi\eta} &= l_1 l_2 \sigma_x + m_1 m_2 \sigma_y + n_1 n_2 \sigma_z + (l_2 m_1 + l_1 m_2) \tau_{xy} + (m_2 n_1 + m_1 n_2) \tau_{yz} + (n_2 l_1 + n_1 l_2) \tau_{zx}\end{aligned}$$

●他の応力成分も同様に変換され、これらを1つの式にまとめると( $i, j=x, y, z$ とする)

$$\sigma_{\xi\eta} = \sum_i \sum_j \sigma_{ij} \cos(\xi i) \cos(\eta j) = \sum_i \sum_j \sigma_{ij} l_{\xi i} l_{\eta j} \quad (1.10)$$

ここで  $\sigma_{\xi\eta}$ 、 $\sigma_{ij}$  は垂直・せん断応力を全て  $\sigma$  記号で表示したもの、 $\cos(\xi i) \equiv l_{\xi i}$  は  $\xi$  軸の  $i$  軸に対する方向余弦、2つの  $\Sigma$  は  $i, j$  を  $x, y, z$  に順次換えて和を取る。

●一般に、 $n$ 次元空間の座標  $\mathbf{x}$  とある量  $F$  の間に

$$\begin{aligned}\mathbf{x} (x_1, x_2, \dots, x_n) &\rightarrow F (F_1, F_2, \dots, F_n) \\ \mathbf{x}' (x'_1, x'_2, \dots, x'_n) &\rightarrow F' (F'_1, F'_2, \dots, F'_n)\end{aligned}$$

の対応があり、 $F$ の座標変換が方向余弦の1次形式として次のように行われるなら

$$F'_i = \sum_j F_j l_{i'j} \quad (l_{i'j}: i', j \text{ 軸間の方向余弦})$$

$F$ または $F'$ を1次(1階)の「テンソル(tensor)」という。力、変位、座標などのベクトル量の座標変換は、二次元 $xy$ 座標で考えた場合、

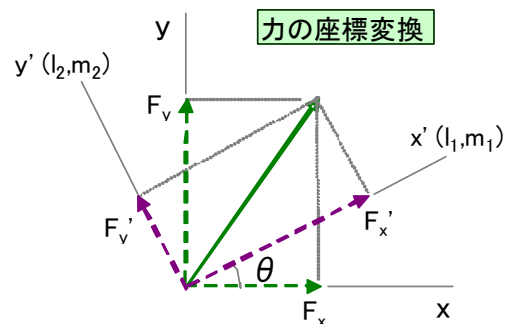
$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix}, \quad \{F'\} = \begin{Bmatrix} F'_x \\ F'_y \end{Bmatrix} \rightarrow \{F'\} = [T]\{F\} \quad (1.11)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

となるので、ベクトルは1次のテンソルである。これに対し、式(1.10)の座標変換は方向余弦の2次形式で行われ、応力成分を  $[\sigma_{ij}]$  と行列表示すると

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}, \quad [\sigma'_{ij}] = [T][\sigma_{ij}][T]^T \quad (1.12)$$

となるので、応力  $[\sigma_{ij}]$  は2次のテンソルであり、特に「応力テンソル」と呼ばれる。



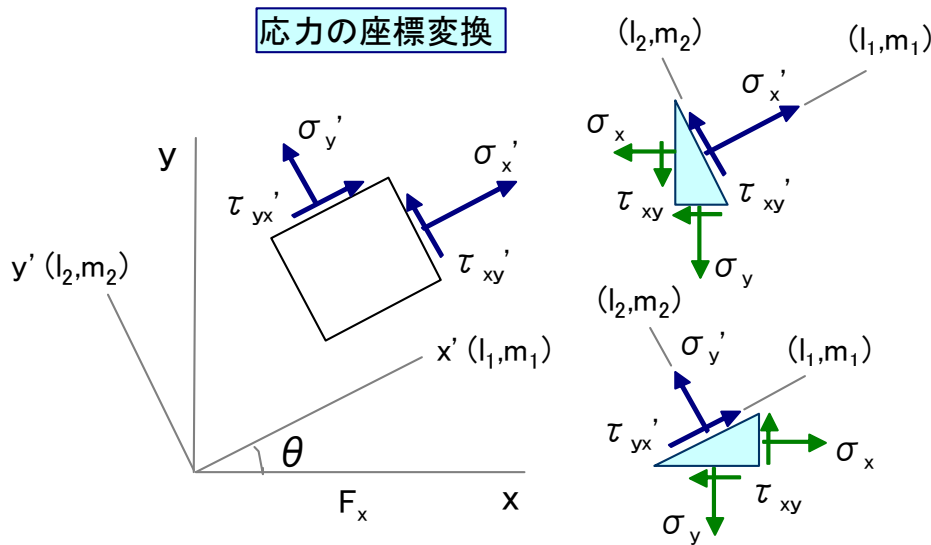
※式(1.12)の誘導

上の三角形で、式(1.8), 式(1.9)を通じて、局所座標と基準座標の応力成分の関係は

$$\begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l_1 \sigma_x + m_1 \tau_{xy} \\ l_1 \tau_{xy} + m_1 \sigma_y \end{Bmatrix} = [\sigma_{ij}] \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \sigma_x' \\ \tau_{xy}' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l_1 p_x + m_1 p_y \\ l_2 p_x + m_2 p_y \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} = [T][\sigma_{ij}] \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

同様に、下の三角形の場合は

$$\begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l_2 \sigma_x + m_2 \tau_{xy} \\ l_2 \tau_{xy} + m_2 \sigma_y \end{Bmatrix} = [\sigma_{ij}] \begin{Bmatrix} l_2 \\ m_2 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \tau_{yx}' \\ \sigma_y' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l_1 p_x + m_1 p_y \\ l_2 p_x + m_2 p_y \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} = [T][\sigma_{ij}] \begin{Bmatrix} l_2 \\ m_2 \end{Bmatrix} \quad (2)$$



①, ②を整理してまとめると

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x' & \tau_{xy}' \end{Bmatrix} = ([T][\sigma_{ij}] \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \end{Bmatrix})^T = \{l_1 \ m_1\} [\sigma_{ij}]^T [T]^T \quad \text{同様に} \quad \begin{Bmatrix} \tau_{yx}' & \sigma_y' \end{Bmatrix} = \{l_2 \ m_2\} [\sigma_{ij}]^T [T]^T$$

$$\rightarrow [\sigma_{ij}'] = \begin{Bmatrix} \sigma_x' & \tau_{xy}' \\ \tau_{yx}' & \sigma_y' \end{Bmatrix} = [T][\sigma_{ij}][T]^T \quad ([\sigma_{ij}]^T = [\sigma_{ij}]) \quad \rightarrow \text{式(1.12)}$$

(4) 応力の主方向 (主応力と不変量)

● 応力テンソル  $[\sigma_{ij}]$  は  $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$  より対称テンソルである。一般に、 $A_{ij}$  を対称テンソルの成分、 $v_i$  をベクトルの成分とすると、 $u_i = \sum_j A_{ij} \cdot v_j$  は新たなベクトルの成分である。ここで、 $u_i$  が元の  $v_i$  と同方向であるとき、 $u_i = \lambda v_i$  の形に書くことができ ( $[I]$ : 単位行列)

$$\sum_j A_{ij} \cdot v_j = \lambda v_i \quad \text{または行列で} \quad [A] \{v\} = \lambda \{v\} = \lambda [I] \{v\}$$

となる。このとき、ベクトル  $v_i$  の方向をテンソルの「主方向」、 $\lambda$  をその「主値」と呼ぶ。三次元問題では  $i = 1, 2, 3$  と置いて  $v_1, v_2, v_3$  に関する連立一次方程式が

$$\begin{aligned}
(A_{11} - \lambda) v_1 + A_{12} v_2 + A_{13} v_3 &= 0 \\
A_{21} v_1 + (A_{22} - \lambda) v_2 + A_{23} v_3 &= 0 \quad \rightarrow \quad ([A] - \lambda [I]) \{v\} = \{0\} \quad (1.13) \\
A_{31} v_1 + A_{32} v_2 + (A_{33} - \lambda) v_3 &= 0
\end{aligned}$$

で与えられ、これが同時には0でない解を持つための条件として次式が成り立つ。

$$\begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (1.14)$$

上式はλに関する3次方程式であり、解いて3つの主値を得る。その1つのλを式(1.13)に代入して $v_i$ について解けば対応するベクトル成分 $(v_1, v_2, v_3)$ が定まる。このベクトルの方向がテンソル $[A_{ij}]$ の主方向、λが主方向に対応する主値である。式(1.14)を「固有方程式」、その解λを「固有値」、対応する式(1.13)の解(主方向)を「固有ベクトル」と称する。テンソル $[A_{ij}] \equiv$ 応力テンソル $[\sigma_{ij}]$ と見なすと、固有値 $\lambda \equiv$ 主応力 $\sigma$ 、固有ベクトル $\equiv$ 主面に立てた法線方向の方向余弦 $(l, m, n)$ に対応する。具体的には、式(1.14)の固有方程式で $\lambda \equiv \sigma$  (主応力)と置いて

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = -(\sigma^3 - I_1 \sigma^2 - I_2 \sigma - I_3) = 0 \quad (1.15)$$

が主応力を定める方程式になり、解いて主応力 $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ を得る。また、得られた主応力を式(1.13)に代入し、方向余弦の性質 $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ を用いれば、各主応力に対応する主面の方向が定まる。式(1.15)の係数 $I_1, I_2, I_3$ は座標系の取り方によって値を変えない不変的な性質を持つ量であるので、1次、2次、3次の「応力の不変量」と呼ぶ。

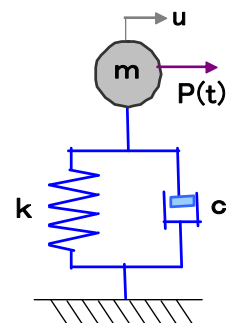
$$\begin{aligned}
I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\
I_2 &= -(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) = -\sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 \quad (1.16) \\
I_3 &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2 \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2
\end{aligned}$$

$A_{ij} = \sigma_{ij}, \lambda = \sigma, (v_1, v_2, v_3) = (l, m, n)$ と置換えて式(1.8)と対比すると、式(1.13)の3つの式は(第1式:  $(\sigma_x - \sigma) \cdot l + \tau_{xy} \cdot m + \tau_{xz} \cdot n = 0 \rightarrow p_x = \sigma \cdot l$ などで)、 $p_x = l \sigma, p_y = m \sigma, p_z = n \sigma$ に対応する。すなわち、 $(l, m, n)$ で表される主面上の合応力 $p$ が、 $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = (l^2 + m^2 + n^2) \sigma^2 = \sigma^2$ となって $\sigma$ なる垂直応力(主応力)に一致し、主面にはせん断応力が働かない。これが主応力の物理的意味である。

### ※振動の問題も固有値問題

- バネ $k$ と減衰 $c$ に接続された質量 $m$ の1自由度系に、振動外力 $P(t)$ が作用する場合の強制振動の方程式は、系の変位、速度、加速度をそれぞれ $u, u^*, u^{**}$ と置いて、次式で表される。

$$m \cdot u^{**} + c \cdot u^* + k \cdot u = P(t)$$



質点を引張ってから離すと、外力  $P(t)=0$  で、系は自由振動をする。このとき、減衰を考えない ( $c=0$ ) 場合は

$$m \cdot u'' + k \cdot u = 0 \rightarrow u'' + (k/m) \cdot u = 0$$

さらに、 $(k/m) = \omega^2$  と置いて

$$u'' + \omega^2 \cdot u = 0$$

と表される。 $\omega = (k/m)^{0.5}$  を「固有円振動数」、 $f = \omega/2\pi$  を「固有振動数」、その逆数  $T = 1/f = 2\pi/\omega$  を「固有周期」という。

- 地盤を多数の層に分けて質量  $m_1, m_2, \dots$  の串ダンゴで表現する多自由度系の振動解析では、強制振動の方程式が

$$[M] \{u''\} + [C] \{u'\} + [K] \{u\} = \{P(t)\}$$

のように、質量・減衰・剛性が行列  $[M]$ ,  $[C]$ ,  $[K]$  で、変位、速度、加速度が自由度数分の成分を有するベクトル  $\{u\}$ ,  $\{u'\}$ ,  $\{u''\}$  で表される。非減衰自由振動では

$$[M] \{u''\} + [K] \{u\} = \{0\}$$

であり、この解を  $\{u\} = \{a\} \sin(\omega t + \phi)$  と置くと (振幅  $\{a\}$ 、円振動数  $\omega$ 、位相角  $\phi$ )、 $\{u''\} = -\{a\} \omega^2 \sin(\omega t + \phi)$  に注意して

$$([K] - \omega^2 [M]) \{a\} = \{0\} \quad \text{または} \quad [K] \{a\} = \omega^2 [M] \{a\}$$

となり、逆行列  $[M]^{-1}$  を乗じて整理すると

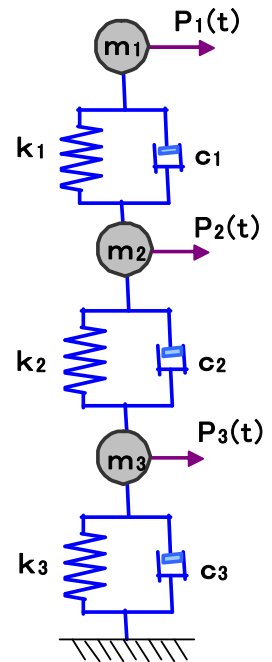
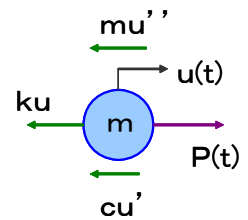
$$[M]^{-1} [K] \{a\} = \omega^2 \{a\} = \omega^2 [I] \{a\}$$

$[M]^{-1} [K]$  は対称行列であるから、上式は主値を求める式：式(1.13)に対応し、振動問題では  $\omega^2$  が「固有値」=「固有円振動数」、 $\{a\}$  が「固有ベクトル」=「固有振動形 (モード)」に対応する。

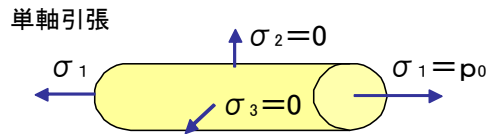
- 主応力とその方向余弦の添字を一致させ、 $\sigma_1$  の方向を  $(l_1, m_1, n_1)$ 、 $\sigma_2$  の方向を  $(l_2, m_2, n_2)$  とする。式(1.13)に  $A_{ij} = \sigma_{ij}$ ,  $\lambda = \sigma_1$ ,  $(v_1, v_2, v_3) = (l_1, m_1, n_1)$  を代入したのち、3つの式に  $(l_2, m_2, n_2)$  をそれぞれ乗じて加えると

$$\begin{aligned} & \{(\sigma_x - \sigma_1) \cdot l_1 + \tau_{xy} \cdot m_1 + \tau_{xz} \cdot n_1\} \times l_2 = 0 \\ & \{\tau_{xy} \cdot l_1 + (\sigma_y - \sigma_1) \cdot m_1 + \tau_{yz} \cdot n_1\} \times m_2 = 0 \\ & \{\tau_{xz} \cdot l_1 + \tau_{yz} \cdot m_1 + (\sigma_z - \sigma_1) \cdot n_1\} \times n_2 = 0 \\ \rightarrow & l_1 l_2 \sigma_x + m_1 m_2 \sigma_y + n_1 n_2 \sigma_z + (l_2 m_1 + l_1 m_2) \tau_{xy} + (m_2 n_1 + m_1 n_2) \tau_{yz} + (n_2 l_1 + n_1 l_2) \tau_{zx} \\ & = (l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2) \sigma_1 \end{aligned}$$

上式で 1~2 と替えると左辺は不変で、右辺は  $(l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2) \sigma_2$  となる。したがって、 $\sigma_1 \neq \sigma_2$  なら  $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$  でなければならず、 $\sigma_1$  の方向  $(l_1, m_1, n_1)$  と  $\sigma_2$  の方向  $(l_2, m_2, n_2)$  は直交する。同様にして、 $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$  なら3つの主応力は互いに直交する。棒の単純引張で  $\sigma_1$  を軸応力にとると、 $\sigma_1 \neq \sigma_2 = \sigma_3$  なので、 $\sigma_1$  と  $\sigma_2$  あるいは  $\sigma_1$  と  $\sigma_3$  は直交すると言えるが、 $\sigma_2$  と



$\sigma_3$ の直交性は言えない。つまり、 $\sigma_2$ と $\sigma_3$ の作る平面（棒の断面）内ではあらゆる方向が主方向になり得るので、任意の直交方向を $\sigma_2$ 、 $\sigma_3$ にとってよい。静水中では $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ （=水圧）の等方応力状態にあるが、このとき空間のあらゆる方向が主方向になるので、任意の直交軸を主方向にとってよい。



- 3主応力軸に等角な正八面体面上の応力成分を「正八面体垂直・せん断応力」と呼び、 $\sigma_{oct}$ 、 $\tau_{oct}$ で表す。正八面体面の法線方向余弦は $l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1$ と等角条件より、 $l_1 = m_1 = n_1 = 1/\sqrt{3}$ であるから、 $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $\sigma_3$ 方向を $x$ 、 $y$ 、 $z$ 軸に一致させて

$$\sigma_x = \sigma_1, \quad \sigma_y = \sigma_2, \quad \sigma_z = \sigma_3$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

とすれば、式(1.8)を用いて  $\mathbf{p}$  ( $p_x, p_y, p_z$ ) は

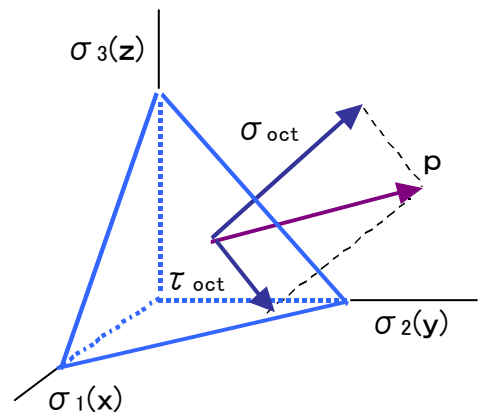
$$p_x = \sigma_1/\sqrt{3}, \quad p_y = \sigma_2/\sqrt{3}, \quad p_z = \sigma_3/\sqrt{3}$$

となり、ベクトル  $\mathbf{p}$  と方向余弦の内積から

$$\sigma_{oct} = [\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{p}] = l_1 p_x + m_1 p_y + n_1 p_z$$

$$= (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3 = I_1 / 3$$

$$= \text{平均主応力} \quad (1.17a)$$



また、 $\mathbf{p} = (\sigma_{oct}, \tau_{oct}) \rightarrow \tau_{oct}^2 = |\mathbf{p}|^2 - \sigma_{oct}^2 = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \sigma_{oct}^2$  より

$$\tau_{oct} = \left\{ (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) / 3 - (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 / 9 \right\}^{0.5}$$

$$= \left\{ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right\}^{0.5} / 3 \quad (1.17b)$$

$$= (2 I_1^2 - 6 I_2)^{0.5} / 3$$

### (5) 2次元応力状態での関係式

- 式(1.10)より、直角座標応力成分 ( $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ ) と任意面上の応力成分 ( $\sigma_\xi, \tau_{\xi\eta}$ ) の関係は

$$\sigma_\xi = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \quad (1.18)$$

$$\tau_{\xi\eta} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

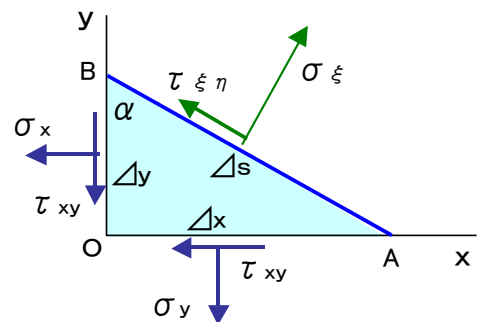


図-1.4 2次元応力

- 主応力の値

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sigma_m \pm \tau_{max} \quad (1.19)$$



## 1.2 ひずみ

### (1) ひずみの定義 (ひずみ～変位関係)

- 図-1.5 は  $x, y$  直角座標内での 2 次元の変形状態を示している ( $\partial_x u = \partial u / \partial x$  など)。面内で考えると、 $AOB \rightarrow A'O'B'$  の変形は  $x, y$  二方向への伸縮変形と、形状変化 (狭角の変化) を表す一つのせん断変形に分解できる。図を参照して、 $x, y$  軸に沿う線素  $OA = dx, OB = dy$  の変形前後の長さの比較から、伸縮変形に伴うひずみ  $\epsilon_x, \epsilon_y$  は次のように定義される。

$$OA' = dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx \rightarrow \epsilon_x = \frac{OA' - OA}{OA} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\text{同様に} \quad \epsilon_y = \frac{OB' - OB}{OB} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

一方、形状変化に対するせん断ひずみ ( $2\gamma_{xy}$ ) は、せん断角の正接:  $\tan(\theta_1 + \theta_2)$  で定義されるが、 $\theta_1, \theta_2 \ll 1$  のとき  $\tan(\theta_1 + \theta_2) \cong \theta_1 + \theta_2$  を考慮すると、幾何学的な関係から

$$\theta_1 \cong \tan \theta_1 = \frac{\partial_x v}{1 + \partial_x u} \cong \frac{\partial v}{\partial x} \quad \theta_2 \cong \tan \theta_2 = \frac{\partial_y u}{1 + \partial_y v} \cong \frac{\partial u}{\partial y} \rightarrow 2\gamma_{xy} \cong \theta_1 + \theta_2 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

- $z$  軸を含めると、3次元直角座標におけるひずみ成分は、3つの垂直 (伸縮) 成分と 3つのせん断成分の合計 6 成分になり、これらは応力成分と対応して次のように定義される。

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ 2\gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & 2\gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} & 2\gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.21)$$

上式の  $\gamma_{xy}$  等を「テンソルひずみ」と言い、材料力学で扱う「工学ひずみ」と区別される。工学ひずみ ( $2\gamma_{xy}$  等) は上の誘導からして物理的に (せん断角という) 意味を持つ量であるが、テンソルひずみは座標変換や主ひずみ等に関する諸式が全て応力テンソルと同形式になる有利性から定義されるもので、テンソル量としてのひずみの意味を持つ。

### ※剛体変位 (rigid body displacement)

$u_r = a + b y, v_r = c - b x$  (第 2 項は  $u_r x = -v_r y$  を満たす) の形で表される変位は、剛体変位成分になる。何故なら、 $u' = u + u_r, v' = v + v_r$  とすると、次式の演算により  $u_r, v_r$  はひずみに影響しない (現れない) ことが分かる。

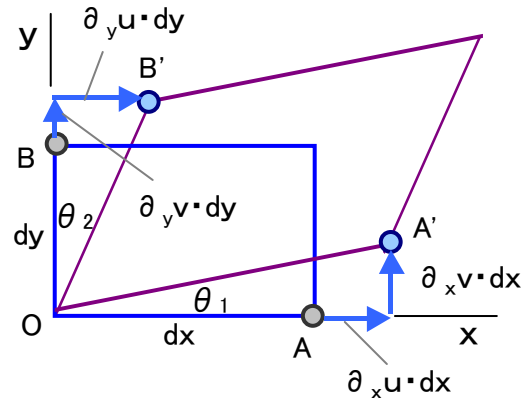
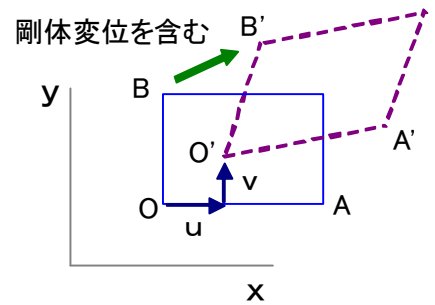
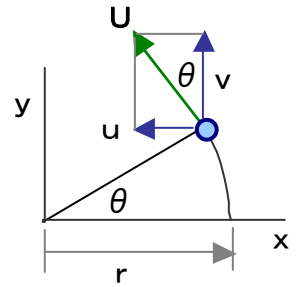


図-1.5 2次元の変形

$$\frac{\partial u'}{\partial x} = \frac{\partial(u + u_r)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x \quad \frac{\partial v'}{\partial y} = \frac{\partial(v + v_r)}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y$$

$$\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} = \frac{\partial(u + u_r)}{\partial y} + \frac{\partial(v + v_r)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} + b + \frac{\partial v}{\partial x} - b = 2\gamma_{xy}$$

$u_r = b y$ ,  $v_r = -b x$  による変位ベクトル  $\mathbf{U}$  は、大きさが  $|\mathbf{U}| = b r$  ( $r^2 = x^2 + y^2$ )、方向が  $v_r/u_r = -x/y = -1/\tan \theta$  となるから、半径  $r$  = 一定の円弧上を一定の大きさを移動する剛体変位(回転)を表す。また、定数  $a, c$  は平行移動に関する剛体変位を表す。



●式(1.21)のひずみは、変位及びその微係数が微小な場合にのみ適用できる(微小ひずみ論)。すなわち、 $x$  軸方向の伸び率:  $e_{xx} = (OA' - OA)/OA$  の計算において、 $OA'$  には実際には  $v$  や  $w$  の項も含まれるが、先の定義ではこれらの影響を無視している。微小項を含めた正確なひずみは

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} \quad (1.22)$$

$$2\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$2\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

$$2\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

## (2) ひずみの直交変換

●物体内の各点の変位 ( $u, v, w$ ) は、一般に座標  $x, y, z$  の関数である。図-1.6 において、 $x, y$  軸に沿う微小長さ  $dx, dy$  の線素が、変形によって  $OA \rightarrow OA'$ ,  $OB \rightarrow OB'$  になったとすると、その差分が  $OA, OB$  間の変形量(相対変位量)を表す。点  $O$  の変位を  $U(u, v, w)$  とすると、微小距離  $dx, dy$  隔たった点  $A, B$  での相対変位の増分  $\Delta U_A, \Delta U_B$  は、式(1.3)と同様に次の形

$$\Delta U_A = \frac{\partial U}{\partial x} dx \quad \Delta U_B = \frac{\partial U}{\partial y} dy$$

で与えられ、それぞれの成分は図示の通りである。

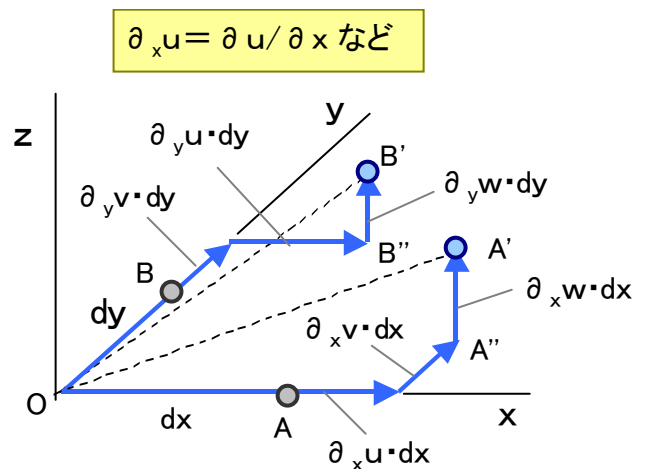


図-1.6 相対変位(3次元)

● 図-1.7 で、任意方向に  $\xi$  軸 ( $l_1, m_1, n_1$ ) をとり、軸上に微小線素  $OA = d\xi (dx, dy, dz)$  を考える。点 A の点 O に対する相対変位を  $dU (du, dv, dw)$  とすると、変形後の線素は  $OA' = d\xi' (dx + du, dy + dv, dz + dw)$  である。これから  $\xi$  方向の伸びひずみとして

$$\varepsilon_{\xi} = (OA' - OA) / OA = (d\xi' - d\xi) / d\xi$$

が定義できる。

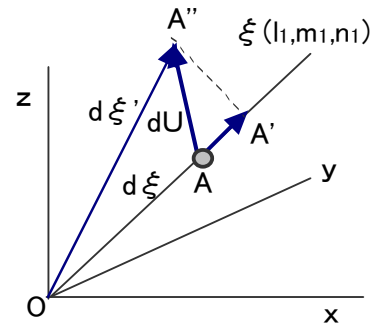
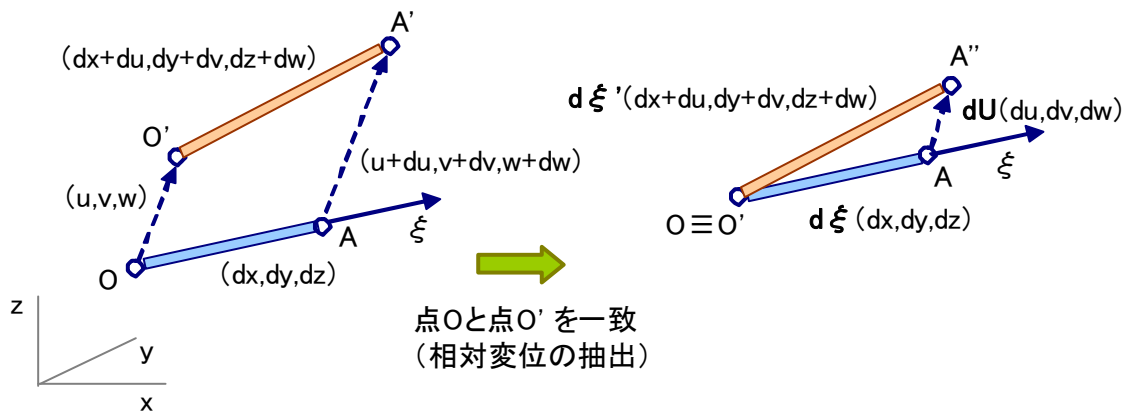


図-1.7 ひずみの変換

※相対変位の図解

図-1.6 及び図-1.7 は、次図に示したように、要素内の基準点の変位前の位置 (点 O) と変位後の位置 (点 O') を一致させて描いてあることに注意する。



● 実際には、相対変位  $AA' = dU$  の  $\xi$  方向成分  $AA'$  に着目した方が考え易い。すなわち、ベクトル  $AA'$  の大きさはベクトル  $dU$  と  $\xi (l_1, m_1, n_1)$  の内積で与えられるから

$$\varepsilon_{\xi} = |AA'| / d\xi = (du, dv, dw) \cdot (l_1, m_1, n_1) / d\xi = (l_1 du + m_1 dv + n_1 dw) / d\xi$$

ここで微分関係より、相対変位の各成分 ( $du, dv, dw$ ) は

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz, \quad dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz, \quad dw = \dots$$

であるから、前式に代入し、 $(dx/d\xi, dy/d\xi, dz/d\xi) = (l_1, m_1, n_1)$  及び式(1.21)を用いて整理すると、任意方向の垂直ひずみ  $\varepsilon_{\xi}$  と直角座標ひずみ成分の関係として

$$\varepsilon_{\xi} = l_1^2 \varepsilon_x + m_1^2 \varepsilon_y + n_1^2 \varepsilon_z + 2(l_1 m_1 \gamma_{xy} + m_1 n_1 \gamma_{yz} + n_1 l_1 \gamma_{zx}) \quad (1.23a)$$

を得る。 $\xi$  軸と任意に直交する  $\eta, \zeta$  軸を考えると、前節と同様の手法でせん断ひずみが定義できる。例えば、 $\eta$  軸の方向余弦を  $(l_2, m_2, n_2)$  とすると、 $\xi \eta$  面内のせん断ひずみは

$$\gamma_{\xi \eta} = l_1 l_2 \varepsilon_x + m_1 m_2 \varepsilon_y + n_1 n_2 \varepsilon_z + (l_2 m_1 + l_1 m_2) \gamma_{xy} + (m_2 n_1 + m_1 n_2) \gamma_{yz} + (n_2 l_1 + n_1 l_2) \gamma_{zx} \quad (1.23b)$$

となる。上二式は応力の座標変換式と同形であり、 $\sigma \rightarrow \varepsilon, \tau \rightarrow \gamma$  の対応をなしている。このように、応力・ひずみは2次のテンソル量として形式的に全く同じ座標変換則を満たすから、式(1.10)に対応して、ひずみの座標変換式を1つにまとめると次の表示を得る。

$$\varepsilon_{\xi\eta} = \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij} \cos(\xi i) \cos(\eta j) = \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij} l_{\xi i} l_{\eta j} \quad (i, j=x, y, z) \quad (1.24)$$

●  $x, y, z$  座標系の変位  $(u, v, w)$  と  $\xi, \eta, \zeta$  座標系の変位  $(u_\xi, u_\eta, u_\zeta)$  の関係は次式で与えられる。

$$u_\xi = \text{内積}(u, v, w) \cdot (l_1, m_1, n_1) = l_1 u + m_1 v + n_1 w$$

$$u_\eta = \text{内積}(u, v, w) \cdot (l_2, m_2, n_2) = l_2 u + m_2 v + n_2 w$$

$$u_\zeta = \text{内積}(u, v, w) \cdot (l_3, m_3, n_3) = l_3 u + m_3 v + n_3 w$$

したがって、式(1.21)で  $x \rightarrow \xi, y \rightarrow \eta, z \rightarrow \zeta, u \rightarrow u_\xi, v \rightarrow u_\eta, w \rightarrow u_\zeta$  と置き換えると  $\xi, \eta, \zeta$  座標系のひずみ成分が直接定義される。例えば

$$\varepsilon_\xi = \frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} \quad 2\gamma_{\xi\eta} = \frac{\partial u_\xi}{\partial \eta} + \frac{\partial u_\eta}{\partial \xi} \quad \text{など}$$

ここで、 $\xi, \eta, \zeta$  に関する微分と  $x, y, z$  に関する微分の間には、方向余弦を介して

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} = l_1 \frac{\partial}{\partial x} + m_1 \frac{\partial}{\partial y} + n_1 \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{など}$$

の関係があるから (方向微分の公式)

$$\varepsilon_\xi = \left( l_1 \frac{\partial}{\partial x} + m_1 \frac{\partial}{\partial y} + n_1 \frac{\partial}{\partial z} \right) (l_1 u + m_1 v + n_1 w)_z \quad \rightarrow \quad (1.23a)$$

$$\begin{aligned} 2\gamma_{\xi\eta} &= \left( l_2 \frac{\partial}{\partial x} + m_2 \frac{\partial}{\partial y} + n_2 \frac{\partial}{\partial z} \right) (l_1 u + m_1 v + n_1 w) \\ &\quad + \left( l_1 \frac{\partial}{\partial x} + m_1 \frac{\partial}{\partial y} + n_1 \frac{\partial}{\partial z} \right) (l_2 u + m_2 v + n_2 w)_z \end{aligned} \quad \rightarrow \quad (1.23b)$$

となって、式(1.23)が別の形で導かれる。 <実際に展開して誘導してみよ>

### (3) 主ひずみの主方向と2次元ひずみ状態

●ある面上でせん断ひずみが0のとき、例えば  $\xi$  軸に直交する  $\eta, \zeta$  面内のひずみ  $\gamma_{\eta\zeta} = 0$  なるとき、 $\xi$  軸を主ひずみ軸、 $\varepsilon_\xi$  を主ひずみという。応力とひずみは相対応する2次のテンソルであるから、主ひずみの値、その方向、また関連して定義されるひずみの不変量は、主応力の定義と同様に定められ、式(1.13)~(1.16)で  $\sigma \rightarrow \varepsilon, \tau \rightarrow \gamma$  と置換して与えられる。

●ひずみに関する1次の不変量  $I_1$  は物理的な意味として体積ひずみ  $e$  を表す。すなわち

$$I_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = e \quad (1.25)$$

主ひずみ方向に辺長:  $dx, dy, dz$  の微小直方体を考えると、その体積は変形前  $V_0 = dx dy dz$ 、変形後  $V = (1 + \varepsilon_1) dx (1 + \varepsilon_2) dy (1 + \varepsilon_3) dz$  であるから、ひずみの2次以上の項を無視して

$$\rightarrow e = (V - V_0) / V_0 = (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) - 1 \doteq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad (1.26)$$

- 2次元問題では応力成分 ( $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ ) と対応して ( $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ ) が独立なひずみ成分になり、ひずみ～変位関係は

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad 2\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.27)$$

前と同様に、任意面上の応力：式(1.18)、主応力：式(1.19)、最大せん断応力：式(1.20)で  $\sigma \rightarrow \varepsilon$ ,  $\tau \rightarrow \gamma$  と置き換えれば、任意方向のひずみ、主ひずみ、最大せん断ひずみの表示が得られる。例えば、 $x$  軸と  $\alpha$  をなす  $\xi$  軸、これと直交する  $\eta$  軸に関するひずみ成分は

$$\begin{aligned} \varepsilon_\xi &= \varepsilon_x \cos^2 \alpha + \varepsilon_y \sin^2 \alpha + \gamma_{xy} \sin 2\alpha \\ \gamma_{\xi\eta} &= -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin \alpha \cos \alpha + \gamma_{xy} \cos 2\alpha \end{aligned} \quad (1.28)$$

主ひずみと最大せん断ひずみの値は

$$\left. \begin{matrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right)^2 + \gamma_{xy}^2} \quad \gamma_{\max} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \quad (1.29)$$

#### (4) ひずみの適合条件

- 式(1.21)のひずみ～変位関係では、6つのひずみ成分が3つの変位成分から導かれるので、ひずみ成分は勝手に指定することはできず、それらの間には何等かの関係が存在する。二次元で言うと、式(1.27)では3つのひずみ成分 ( $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ ) が2つの変位成分  $u, v$  から導かれるので、微分により  $u, v$  を消去して、次式の微分関係を得る。

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (1.30)$$

これを「ひずみの適合条件式」という。二次元では上式だけが所要の適合条件式である。

- 三次元では、上式で  $x, y, z$  を順次変えた3つの式と、下式の形で同様に  $x, y, z$  を順次変えた3つの式、したがって合計6つの関係式が導かれる。

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right] \quad (1.31)$$

なお、3つの変位成分から6つのひずみ成分が導かれるので、適合条件式は3つあればよいように想われるが、上の6つの式は必要かつ十分なものであることが証明されている。

### 1.3 極座標と円筒座標

#### (1) 座標における諸関係

- 円板、円管など物体の断面形状が円形の場合は、 $x$   $y$  直角座標系より極座標  $(r, \theta)$  を用いる方が便利である。また、三次元物体としての円柱には円筒座標、球形のドーム等には球座標などが対応してよく用いられる。極座標と直角座標の関係は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta & \theta &= \tan^{-1}(y/x) \\ y &= r \sin \theta & r &= (x^2 + y^2)^{0.5} \end{aligned} \quad (1.32)$$

- 極座標に関する応力成分は、図-1.8 の微小扇形 ABCD に働く  $r, \theta$  方向の垂直応力  $\sigma_r, \sigma_\theta$  とせん断応力  $\tau_{r\theta}$  の 3 成分である。これらは  $x$   $y$  直角座標系における  $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$  に対応するものであり、正・負の面上の応力成分間には式(1.3)と同様の関係が成り立ち

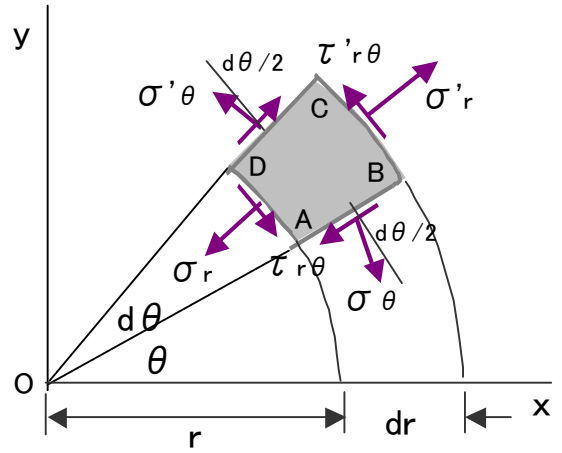


図-1.8 極座標の応力成分

$$\begin{aligned} \sigma_r' &= \sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr & \sigma_\theta' &= \sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta \\ \tau_{r\theta}' &= \tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} dr \text{ (BC面)} & &= \tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta \text{ (CD面)} \end{aligned} \quad (1.33)$$

- $(\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta})$  と  $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$  の関係は式(1.10)の座標変換で定まり、 $r, \theta$  軸の方向余弦が  $(l_1, m_1) = (\cos \theta, \sin \theta)$ ,  $(l_2, m_2) = (-\sin \theta, \cos \theta)$  なることより

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2 \tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ \sigma_\theta &= \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - 2 \tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ \tau_{r\theta} &= -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned} \quad (1.34)$$

上式で  $(\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}) \sim (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ ,  $\theta \rightarrow -\theta$  とすれば逆の変換式を得る。 <誘導せよ>

- 極座標の応力のつり合い式も、 $x$   $y$  座標と同様に図-1.8 の微小扇形に作用する力のつり合いから導くことができる。 $\sigma_\theta, \tau_{r\theta}$  が  $r$  方向と角  $d\theta/2$  なすことに注意して  $r$  方向のつり合いを調べると ( $R$  を  $r$  方向の物体力とし、 $\cos(d\theta/2) \cong 1$ ,  $\sin(d\theta/2) \cong d\theta/2$  を用いる)

$$\begin{aligned} \sigma_r' (r+dr)d\theta - \sigma_r (rd\theta) + (\tau_{r\theta}' - \tau_{r\theta}) dr \cdot \cos(d\theta/2) \\ - (\sigma_\theta' + \sigma_\theta) dr \cdot \sin(d\theta/2) + R r dr d\theta = 0 \\ \rightarrow \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{r \partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R = 0 \end{aligned}$$

同様に <誘導せよ> 
$$\frac{\partial \sigma_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + \Theta = 0 \quad (1.35)$$

となって応力のつり合い式を得る。ただし、 $\Theta$  は  $\theta$  方向の物体力である。

●式(1.35)は  $x, y$  座標における応力のつり合い方程式を変数変換して導くことができる。すなわち、式(1.32)の  $x, y$  と  $r, \theta$  の関係より

$$*1 \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos \theta \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \theta \quad *2 \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin \theta}{r} \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r}$$

※誘導：

$$*1 \quad t = x^2 + y^2 \quad \text{と置換え} \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial \sqrt{t}}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{r} = \cos \theta$$

$$*2 \quad t = \frac{y}{x} = \tan \theta \quad \text{と置換え} \quad \frac{\partial t}{\partial \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} = \cos^2 \theta \cdot y \cdot (-x^{-2}) = -\frac{y \cos^2 \theta}{x^2} = -\frac{y}{r^2}$$

となるから、 $x, y$  に関する微分は次式で  $r, \theta$  に関する微分に置き替わる。

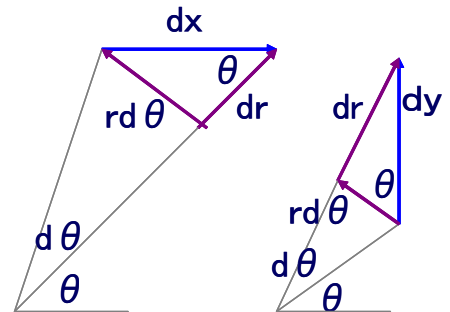
$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (1.36)$$

式(1.34)と同形の座標変換で  $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$  を  $(\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta})$  で表し、上式の微分を用いてつり合い方程式を作り、更に  $R = X \cos \theta + Y \sin \theta, \Theta = -X \sin \theta + Y \cos \theta$  の関係を用いると、式(1.35)が導かれる。 <誘導せよ>

※式(1.36)の  $\theta$  に関する微分は、 $\partial \theta \rightarrow r \partial \theta$  とみなせば 1.2 節の方向微分の公式に対応する。すなわち、図-1.8で  $r, \theta$  座標軸上の微小線素は  $(dr, r d\theta)$  であるから、 $x, y$  軸の  $r, \theta$  軸に対する方向余弦は以下のようなになる(右図)。

$$x: \left( \frac{dr}{dx}, \frac{rd\theta}{dx} \right) = (\cos \theta, -\sin \theta)$$

$$y: \left( \frac{dr}{dy}, \frac{rd\theta}{dy} \right) = (\sin \theta, \cos \theta)$$



このように、方向微分の公式は、 $\theta$  座標を角度( $d\theta$ )でなく、長さ( $r d\theta$ )で扱って導かれる。

●応力とひずみは同形の変換則に従うから、式(1.34)で  $\sigma \rightarrow \varepsilon, \tau \rightarrow \gamma$  と置換えれば、 $r, \theta$  座標のひずみが  $x, y$  座標のひずみ成分で次のように表される。

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \varepsilon_x \cos^2 \theta + \varepsilon_y \sin^2 \theta + 2\gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ \varepsilon_\theta &= \varepsilon_x \sin^2 \theta + \varepsilon_y \cos^2 \theta - 2\gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ \gamma_{r\theta} &= -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin \theta \cos \theta + \gamma_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned} \quad (1.37)$$

● $r, \theta$  座標の変位  $(u_r, u_\theta)$  と  $x, y$  座標の変位  $(u, v)$  の関係は、変位の座標変換より

$$u = u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta \quad v = u_r \sin \theta + u_\theta \cos \theta \quad (1.38) *$$

となるから、式(1.36)の方向微分の関係式を用いると

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \left[ \cos \theta \cdot \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \right] (u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta)$$

となつて、 $\varepsilon_x$  が  $r \theta$  座標の変位成分で表される。 $\varepsilon_y, \gamma_{xy}$  も同様に表し、式(1.37)に代入すると、 $r \theta$  座標におけるひずみ～変位関係として次式を得る。 <誘導せよ>

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad \varepsilon_\theta = \frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta} + \frac{u_r}{r} \quad 2\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u_r}{r \partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \quad (1.39)$$

上式はもちろん、幾何学的な関係からも誘導できる。

●式(1.39)から  $u_r, u_\theta$  を消去すると、極座標のひずみの適合条件式が導かれる。 <誘導せよ>

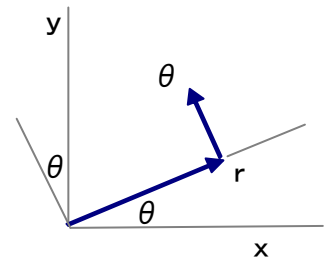
$$\frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \theta^2} + r \frac{\partial(\varepsilon_r - 2\varepsilon_\theta)}{\partial r} - r^2 \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial r^2} = 2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \gamma_{r\theta} + r \frac{\partial \gamma_{r\theta}}{\partial r} \right] \quad (1.40)$$

※極座標( $r \theta$ )と直角座標( $x y$ )の変位成分の関係 ～ 変位の座標変換

	x	y
r	$\cos \theta$	$\sin \theta$
$\theta$	$-\sin \theta$	$\cos \theta$

	r	$\theta$
x	$\cos \theta$	$-\sin \theta$
y	$\sin \theta$	$\cos \theta$

$$\rightarrow \text{式(1.38)} : \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_r \\ u_\theta \end{Bmatrix}$$



## (2) 円筒座標と軸対称問題

●円筒座標では( $x, y, z$ )の代わりに( $r, \theta, z$ )を用いるので、図-1.8 で定義した極座標の応力成分( $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ )の他に、図-1.9 の3成分( $\sigma_z, \tau_{rz}, \tau_{\theta z}$ )が加わる。 $x y z$ 座標と円筒座標の応力成分の関係は、極座標成分については前と同じであり、 $\tau_{rz}, \tau_{\theta z}$  は

$$\begin{aligned} \tau_{rz} &= \tau_{zx} \cos \theta + \tau_{yz} \sin \theta \\ \tau_{\theta z} &= -\tau_{zx} \sin \theta + \tau_{yz} \cos \theta \end{aligned} \quad (1.41)$$

●応力のつり合い方程式は図-1.9 の微小要素に働く力のつり合いから、次のように導かれる。 <誘導せよ>

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{r \partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + \Theta &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{r \partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + Z &= 0 \end{aligned} \quad (1.42)$$

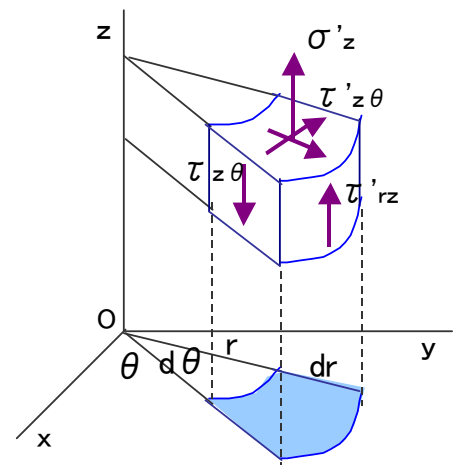


図-1.9 円筒座標



●円筒座標のひずみ成分は

$$(\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \gamma_{r\theta}, \gamma_{rz}, \gamma_{z\theta})$$

の6成分である。このうち極座標成分は式(1.39)で与えられ、他はz方向の変位成分wが関係して、以下の形になる。

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad 2\gamma_{rz} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \quad 2\gamma_{\alpha z} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{\partial w}{r\partial\theta} \quad (1.43)$$

- 物体の形状や荷重状況が円形で、中心を通るz軸に関して対称な応力・変形問題を「軸対称問題」という。このとき  $u_\theta = 0$  であり、 $u_r, w$  は  $r, z$  のみの関数で  $\theta$  を含まない。したがって、式(1.39)、式(1.43)で  $\gamma_{r\theta} = \gamma_{z\theta} = 0$  となり、残るひずみ成分は

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad 2\gamma_{rz} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \quad (1.44)$$

また、ひずみの適合条件式は式(1.40)において  $\gamma_{r\theta} = 0$  より 右辺=0、式(1.44)より  $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$  は  $r$  のみの関数になるから、 $\partial^2 \varepsilon_r / \partial \theta^2 = 0$ 、そして

$$\begin{aligned} r \frac{\partial(\varepsilon_r - 2\varepsilon_\theta)}{\partial r} - r^2 \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial r^2} = 0 &\rightarrow \frac{d\varepsilon_r}{dr} = 2 \frac{d\varepsilon_\theta}{dr} + r^2 \frac{d^2 \varepsilon_\theta}{dr^2} = \frac{d}{dr} \left[ \frac{d(r\varepsilon_\theta)}{dr} \right] \\ &\rightarrow \varepsilon_r = \frac{d(r\varepsilon_\theta)}{dr} \end{aligned} \quad (1.45)$$

- 軸対称問題では、応力～ひずみ関係から  $\tau_{\theta z} = \tau_{r\theta} = 0$  である。また、他の4つの応力成分に  $\theta$  は含まれない。加えて、 $\theta$  方向の物体力： $\Theta = 0$  であるから、式(1.42)の第2式は自動的に満たされる。よって、応力のつり合い方程式は

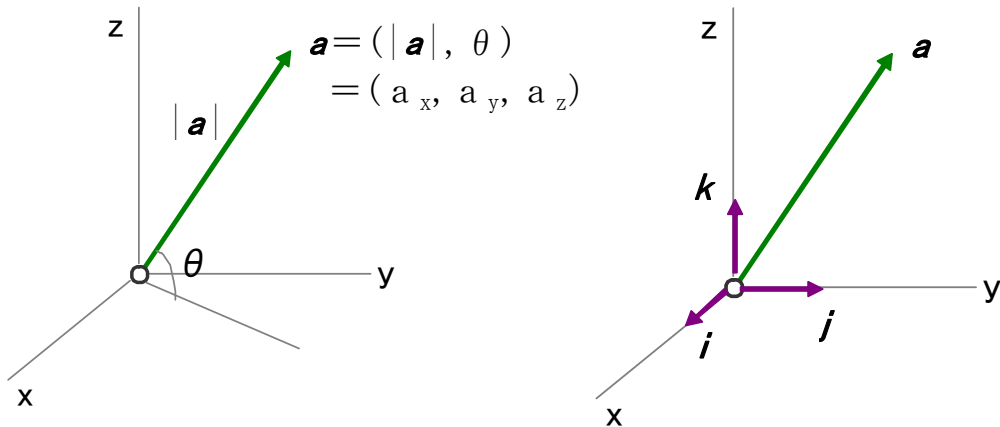
$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R = 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + Z = 0 \end{aligned} \quad (1.46)$$

## <補足>ベクトルと方向余弦

### 1. ベクトル

- ベクトルは、大きさ（絶対値）と方向で定義される量であり、表現として次の2通りがある。

$$\begin{aligned} \text{ベクトル } \mathbf{a} &= (|\mathbf{a}|, \theta) & |\mathbf{a}| : \mathbf{a} \text{ の絶対値} & \theta : \text{例えば水平からの傾角} \\ &= (a_x, a_y, a_z) & x \ y \ z \text{ 座標軸方向の成分} & \end{aligned}$$



- 絶対値が1のベクトルを単位ベクトルという。x y z 直角座標に沿う単位ベクトルを基本ベクトルと呼び、それらを  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  と置くと

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0) \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0) \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

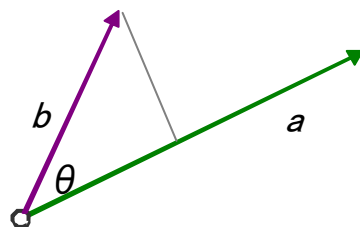
- 基本ベクトルを用いると、任意のベクトル  $\mathbf{a}$  は次のように表せる。

$$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x \times (1, 0, 0) + a_y \times (0, 1, 0) + a_z \times (0, 0, 1) = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$$

### 2. ベクトルの内積（スカラー積）

- ベクトル  $\mathbf{a}$  とベクトル  $\mathbf{b}$  の内積とは、両者の交角を  $\theta$  として

$$\text{内積} : \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta \quad (= \text{スカラー量})$$



と定義される。  $|\mathbf{b}| \cos \theta$  はベクトル  $\mathbf{b}$  のベクトル  $\mathbf{a}$  方向の成分（射影）であるから、幾何学的に内積は、ベクトル  $\mathbf{a}$  の大きさ  $|\mathbf{a}|$  と、もう一方のベクトル  $\mathbf{b}$  の  $\mathbf{a}$  方向の成分との掛け算といえる。（ $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  を逆に言っても同じ） 内積には、

$$\text{交換の法則} : \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \quad \text{分配の法則} : \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$$

が成り立つ。また、特別な場合として

$\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ が直交のとき ( $\theta = 90^\circ$ ):  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$

$\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ が平行のとき ( $\theta = 0^\circ$ ):  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$

• したがって、基本ベクトル (直交座標) 同士の内積は

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$$

• 基本ベクトルの性質を使って、ベクトル  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  の内積を成分で表すと

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \cdot (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

•  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  のように3つの成分を有するベクトルは3行1列の行列で表され

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Bmatrix} = \{a\} \quad \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} = \{b\}$$

と書ける。したがって、 $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  の内積は行列算法を使って次式で表される。

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \{a\}^T \{b\} = \{a_x \ a_y \ a_z\} \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

### 3. 方向余弦

• ベクトル  $\xi$  が  $x$   $y$   $z$  座標軸となす角を ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ) とするとき、 $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$  を  $\xi$  の方向余弦と呼び、通常  $(1, m, n)$  で表す。ベクトル  $\xi = |\xi| (1, m, n)$  と表せるから、 $\xi$  軸方向の単位ベクトル ( $|\xi| = 1$ ) は方向余弦を成分にもつベクトルになる。

• 任意のベクトル  $\mathbf{a}$  ( $a_x, a_y, a_z$ ) と  $\xi$  軸方向の単位ベクトル  $\xi$  ( $1, m, n$ ) のなす角を  $\theta$  とすると、

$$\begin{aligned} \text{内積: } \mathbf{a} \cdot \xi &= |\mathbf{a}| |\xi| \cos \theta = |\mathbf{a}| \cos \theta \quad (\because |\xi| = 1) \\ &= a_x 1 + a_y m + a_z n \quad (\text{成分の表現}) \end{aligned}$$

すなわち、この内積はベクトル  $\mathbf{a}$  の  $\xi$  軸方向の成分 (射影) を表す。

• 任意に傾く直交座標軸 ( $\xi$ ,  $\eta$ ) の方向余弦が  $\xi (1_1, m_1, n_1)$ ,  $\eta (1_2, m_2, n_2)$  のとき

$$1_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1, \quad 1_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1 \quad (\text{方向余弦の大きさは1})$$

$$1_1 1_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0 \quad (\xi, \eta \text{ 軸が直交する条件})$$

